ESERCIZI SU MATRICI, DETERMINANTI E RANGO
CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ
A.A. 2019/20

Esercizio 1. *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

scrivete a quale spazio di matrici appartengono (ad esempio, $A \in M^{3\times 3}$), individuate quali dei prodotti di due di loro sono possibili e calcolateli.

Esercizio 2. *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verificate che $AA = \mathrm{Id}$, cioè che in questo caso A coincide con la sua inversa. Quale altra matrice che conoscete ha questa proprietà?

Esercizio 3. *Calcolate $AB - BA$ per le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. *Date le matrici-colonna*

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

verificare che sia $AB^T \in M^{3\times 3}$ che $B^T A = \langle B, A\rangle \in M^{1\times 1}$ hanno rango uno.

Esercizio 5. *Trovate il rango delle matrici*

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1/3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. *Verificate che*

$$e_1 \times e_2 = e_3, \qquad e_2 \times e_3 = e_1, \qquad e_3 \times e_1 = e_2.$$

Esercizio 7. *Trovate la normale al piano generato dai due vettori $v_1 = (0,1,1)^T$ e $v_2 = (1,1,1)^T$ senza calcolare l'equazione cartesiana del piano.*

Esercizio 8. *Trovate la proiezione del punto $P = (1,2,1)$ col piano passante per l'origine generato da $v_1 = (0,1,1)$ e $v_2 = (1,0,-1)^T$ come intersezione tra il piano stesso e la normale al piano passante per P. Cosa significa il risultato?*

Esercizio 9. *Come mai $v \times 2v$ è il vettor nullo quale che sia il vettore $v \in \mathbb{R}^3$?*

Esercizio 10. *Convincetevi con un disegno che un vettore direzione della retta che è intersezione dei due piani*

$$2x - 4y + z = 0, \qquad x - y - 3 = 0$$

è ortogonale alle due normali dei due piani (in realtà è la definizione della normale a un piano, che è ortogonale a tutti i vettori appartenenti al piano).

Usate questa osservazione per trovare un'equazione parametrica della retta

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 0, \\ x - y - 3 = 0. \end{cases}$$