ESERCIZI SU RETTE, PIANI E LORO MUTUA POSIZIONE
CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ
A.A. 2019/20

Esercizio 1. *Determinate l'equazione parametrica e/o cartesiana delle rette di* $\mathbb{R}^3$*:*

a) *passante per i punti* $(1, 0, 2)$ *e* $(3, -1, 0)$.
b) *passante per il punto* $(1, 3, 1)$ *e generata dal vettore* $v = (2, 0, 0)^T$.
c) *di equazione cartesiana*

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y - x + z = 0 \end{cases}$$

Determinare inoltre due punti appartenente ad ognuna di tali rette.

Esercizio 2. *Determinate l'equazione parametrica e cartesiana del piano* π *passante per i punti*

$$P_1 = (1, 3, 1), \qquad (2, 0, 0), \qquad (0, 1, 1).$$

Il punto $P = (0, 2, 0)$ *appartiene a tale piano? Inoltre determinare un'equazione cartesiana della retta passante per* P_1 *ortogonale a* π.

Esercizio 3. *Determinare l'equazione cartesiana del piano ortogonale alla retta di equazione*

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

. passante per $(1, 2, -3)$. *Trovate anche l'intersezione tra retta e piano.*

Esercizio 4. *Determinate equazioni parametriche ed cartesiane della retta dello spazio passante per*

$$(2, ?1, 3), \qquad (3, 5, 4).$$

Stabilire se tala retta interseca il piano di equazione cartesiana $2x - y + z = 0$ *(cioè se la loro intersezione non è vuota).*

Esercizio 5. *Trovate le equazioni (parametrica e cartesiana) della retta di* $\mathbb{R}^3$ *passante per i punti*

$$(1/2, 1, 3/2) \qquad e \qquad (1, 1, 0).$$

Trovate l'equazione cartesiana del piano che contiene questa retta (in particolare contiene i due punti!) e passa per l'origine.

Esercizio 6. *Sia* r *la retta in* $\mathbb{R}^3$ *di equazioni cartesiane*

$$\begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ 2x + 2y - z - 3 = 0. \end{cases}$$

e sia ℓ *la retta di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \qquad\qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 0, \end{cases}$$

Determinare un' equazione cartesiana del piano π passante per il punto $(1,2,3)$ ed ortogonale alla retta ℓ. La retta r interseca il piano π?

Esercizio 7. *Considerate i piani dello spazio*

$$\pi_1 : x - y + z = 0 \qquad e \qquad \pi_2 : 8x + y - z = 0.$$

Stabilire la posizione reciproca dei due piani e poi trovare un'equazione cartesiana del piano passante per $(1,1,1)$ e perpendicolare ai piani π_1 e π_2 (aiuto: la normale al piano cercato dovrà essere ortogonale sia alla normale n_1 a π_1 che alla normale n" a π_2, quindi...)

Esercizio 8. *Trovate:*

- *equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per i punti $(2,1,3)$ e $(1,2,1)$;*
- *un'equazione cartesiana del piano π parallelo alla retta r e allasse z (cioè generato dal vettori che genera r e da e_3) e passante per l'origine;*
- *equazioni parametriche e cartesiane del piano $_2$ passante per i punti $(-1,1,1)$, $(2,0,1)$ e perpendicolare alla retta di equazioni cartesiane*

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = 0; \end{cases}$$

  (suggerimento: il passaggio per i due punti vi permette di trovare un vettore che genera il piano; l'altro deve essere ortogonale a ...)
- *un'equazione cartesiana del piano π_3 parallelo al piano π_2 e passante per il punto $(0,1,2)$.*

Esercizio 9. *Considerate i piani*

$$\pi_1 : z - 3 = 0, \qquad \pi_2 : x + y + 2 = 0, \qquad \pi_3 : 3x + 3y - z + 9 = 0$$

e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

a) *Stabilite se il piano π_3 contiene r (basta vedere se l'intersezione tra π_1, π_2, π_3 è una retta o meno);*
b) *Calcolate la proiezione ortogonale dell'origine sul piano π_1.*

Esercizio 10. *Verificare che i quattro punti*

$$P_1 = (1,2,1), \qquad P_2 = (2,1,0), \qquad P_3 = (-1,0,-1), \qquad P_4 = (0,0,-1)$$

sono complanari (cioè appartengono allo stesso piano) (aiuto, due modi: trovate l'equazione cartesiana del piano passante per tre di loro e verificate che anche il quarto soddisfa l'equazione, oppure verificate che i tre vettori $P_4 - P_1, P_4 - P_2, P_4 - P_3$ sono linearmente dipendenti).

Esercizio 11. *Nello spazio, considerate i piani π_1, π_2 di equazioni*

$$\pi_1 : 3x - y + z = 0, \qquad \pi_2 : 2x + y = 0.$$

a) *Scrivete un'equazione parametrica della retta r intersezione di π_1 e π_2;*
b) *Determinare un'equazione cartesiana del piano ortogonale ai due piani assegnati e passante per il punto $P = (2,1,0)$;*
c) *Trovare la proiezione ortogonale del punto P sulla retta r.*

Esercizio 12. *Dato il piano $\pi : x - y = 2$ in $\mathbb{R}^3$ e dati i due punti $P_1 = (1,1,1)$ e $P_2 = (0,1,0)$,*

- *scrivete l'equazioni della retta r passante per P_1 e P_2;*

- *trovate le proiezioni dei punti* P_1 *e* P_2 *sul piano* π*;*
- *trovate l'equazione della retta* s *passante per le due proiezioni; tale retta è la proiezione di* r *su* π*;*
- *trovate l'intersezione tra* r *e* π *e verificate che tale punto appartiene alla retta* s.