ESERCIZI SU VETTORI NELLO SPAZIO, PRODOTTI SCALARI E PIANI
CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ
A.A. 2019/20

Esercizio 1. *Dati i vettori di* $\mathbb{R}^3$

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

disegnarli nello spazio euclideo con riferimento cartesiano e calcolare:

$$\|v\|, \qquad \|w\|, \qquad \|u\|, \qquad \frac{v}{\|v\|}, \qquad \frac{w}{\|w\|}, \qquad \frac{u}{\|u\|},$$

$$\langle v, w\rangle, \qquad \langle u, w\rangle, \qquad \langle v+u, w\rangle \qquad \langle 2v-w, u\rangle, \qquad \langle \frac{w}{\|w\|}, \frac{u}{\|u\|}\rangle.$$

Perchè risulta $\|v\|^2+\|w\|^2-\|v+w\|^2 = \|v\|^2+\|u\|^2-\|v+u\|^2 = 0$*? Quale è l'angolo* θ *tra* w *ed* u*?*

Esercizio 2. *Dati i vettori*

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

calcolate

$$\pi_w(\underline{0}), \qquad \pi_w(v_1), \qquad \pi_w(v_1), \qquad \pi_w(v_2), \qquad \pi_w(v_3),$$

$$v_1-\pi_w(v_1), \qquad v_2-\pi_w(v_2), \qquad v_3-\pi_w(v_3),$$

e disegnateli. Come vi spiegate che $\pi_w(v_1) = \underline{0}$*, cioè è il vettor nullo?*

Esercizio 3. *Scrivere l'equazione cartesiana del piano di* $\mathbb{R}^3$ *passante per l'origine ed ortogonale al vettore* v *dell'Esercizio 1. Verificate che i punti finali dei vettori* w, u *dello stesso esercizio appartengono al piano. Perché?*

Esercizio 4. *Trovate, per i piani aventi le seguenti equazioni cartesiane, i due vettori normali di lunghezza uno:*

$$x = 0, \qquad y = -1, \qquad z = \sqrt{3}, \qquad x+y = 1, \qquad x = -y-z,$$

$$3x-y-z = 0, \qquad x-2y+z-2 = 0, \qquad x-z+1 = 0.$$

Esercizio 5. *Trovate e disegnate nel riferimento cartesiano di* $\mathbb{R}^3$ *le intersezioni (se ci sono!) dei piani dell'esercizio precedente coi piani coordinati.*

Esercizio 6. *Sempre in riferimento all'Esercizio 4, trovate tre punti* P_1, P_2, P_3 *a vostra scelta per ogni piano e verificate che i due vettori* $P_2 - P_1, P_3 - P_1$ *sono ortogonali ad uno dei due normali ai piani. Verificate, inoltre, che per i piani passanti per l'origine (cioè per il primo, il quinto e il sesto) i punti, cioè i vettori* $P_1 - \underline{0}, P_2 - \underline{0}, P_3 - \underline{0}$ *sono ortogonali ad* n *mentre se i piani non passano per l'origine (e questo accade per il secondo, terzo, quarto, settimo, ottavo), il prodotto scalare dei punti/vettori con* n *non è zero.*

Esercizio 7. *Scrivete un'equazione cartesiana per i tre piani aventi rispettivamente i vettori* v_1, v_2, v_3 *dell'Esercizio 2 come normali e passanti per l'origine, poi dei piani aventi* v_1, v_2, v_3 *come normali e passanti per* $(1, 0, 0)$ *ed infine i piani aventi come normali* v_1, v_2, v_3 *e passanti per* $(-2, 2, -2)$.

Esercizio 8. *Per le rette dell'Esercizio 9 della scheda scorsa, trovate un vettori normale. Verificate che sia ortogonale al vettore generatore della retta, che compare nell'Esercizio 8 della stessa scheda.*