CORREZIONE DEL QUARTO APPELLO SCRITTO DEL CORSO DI FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA E GEOMETRIA

CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ

PARMA, 29.06.20

- ARS, 8CFU: Esercizi **1,2,3,6,7,9**, durata **2h**, punti **5,4,4,4,12,4**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compito intero**: Esercizi **1,2,4,5,7,8,9**, durata **2h30'**, punti **3,2,4,4,11,5,4**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **analisi**: Esercizi **6,7,8,9**, durata **1h45'**, punti **6,16,6,5**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **geometria**: Esercizi **1,2,4,5**, durata **1h**, punti **8,5,11,9**

Esercizio 1. *I tre punti di* $\mathbb{R}^3$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sono allineati? Se sì, trovare equazioni parametrica e cartesiana della **retta** *a cui appartengono. Se no, trovare equazioni parametrica e cartesiana del* **piano** *a cui appartengono. In entrambi i casi, dire se l'ente geometrico (retta o piano) passa per l'origine.*

Soluzione: vi propongo due soluzioni. La prima è più standard: i tre punti sono allineati se e solo se i vettori $P_1 - P_2$ e $P_2 - P_3$ (o qualsiasi altra differenza tra punti diversi) sono linearmente dipendenti. Visto che

$$P_1 - P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 - P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e tali vettori sono dipendenti (infatti ottenete il secondo moltiplicando il primo per -2; oppure verificatelo calcolando il rango della matrice le cui righe sono i vettori stessi), allora i punti sono allineati. Quindi calcoliamo le equazioni della retta passante per i tre punti (che, appunto, sono allineati!): l'equazione parametrica è praticamente già scritta dato che ognuno dei due vettori sopra la genera. Quindi

$$w = P_1 + \lambda(P_1 - P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ -2\lambda \\ -1-\lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Da questa è facile calcolare un'equazione cartesiana: sottraendo la terza riga dalla prima e poi sommando prima e terza e sostituendo dalla seconda abbiamo

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x - z = 2 \\ x + z = y. \end{cases}$$

Da quest'ultima si vede facilmente che la retta non passa per l'origine, dato che la terna $(0, 0, 0)$ non soddisfa la prima equazione.

Un'altra strada, logicamente differente ma che richiedeva gli stessi calcoli era la seguente: calcoliamo la retta passante per P_1 e P_2 (che è quella già calcolata sopra) e vediamo se il punto P_3 appartiene o meno alla retta. Nel caso fossimo fortunati, cioè nel caso il punto P_3 appartenga (e questo è il caso - verificatelo), l'esercizio è finito. Nel caso converso, cioè nel quale P_3 non appartiene alla retta, dobbiamo lavorare ancora per trovare le equazioni del piano.

Esercizio 2. *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = B^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

calcolate **quando possibile** *AB, BA, AC, CA e i determinanti ed i ranghi di queste matrici.*

Soluzione: $A \in M^{3\times 3}$, $B \in M^{2\times 3}$, $C \in M^{3\times 2}$; quindi gli unici prodotti che possono essere svolti sono BA e AC (notiamo che entrambe queste matrici non sono quadrate, quindi il loro determinante non è definito). Abbiamo

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + \sqrt{2}\cdot 2 + 0\cdot 1 & 0\cdot 1 + \sqrt{2}\cdot 0 + 0\cdot 2 & 0\cdot 0 + \sqrt{2}\cdot(-1) + 0\cdot 1 \\ -1\cdot 0 + 0\cdot 2 + 2\cdot 1 & -1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot -1 & -1\cdot 0 + 0\cdot(-1) + 2\cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dato che

$$\det \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 6\sqrt{2},$$

BA ha un minore 2×2 non singolare e quindi il rango di BA è due. Analogamente

$$\begin{aligned}
AC &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot \sqrt{2} + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -4 \\ 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e il rango di AC è anch'esso due perchè

$$\det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4\sqrt{2} \neq 0.$$

Esercizio 3. *Scrivete le matrici (incompleta A e completa $(A|b)$) associate al sistema*

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

e calcolate il determinante di A. È possibile che il sistema abbia come soluzione il solo vettor nullo?

Soluzione:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1 - (-3)) + 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) = 0 + 2 - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Quindi la matrice è singolare e il rango di entrambe $A, (A|b)$ è alpiù due. Il sistema è quindi indeterminato e **non** avrà solo la soluzione nulla.

Esercizio 4. *Dato l'operatore lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

scrivete la matrice 3×3 associata e trovate gli autovalori con le loro molteplicità algebrica e geometrica. Scrivete le equazioni cartesiane e parametriche dei corrispondenti autospazi e per ogni autospazio scrivetene **un autovettore** *non nullo esplicitamente.*

Soluzione: abbiamo

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad T(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e quindi la matrice associata, che è quella le cui colonne sono i vettori $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare gli autovalori dell'operatore calcoliamo, come al solito, il determinante di $A - \lambda \mathrm{Id}$: sviluppando secondo la prima riga

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathrm{Id}) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\big[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 1\big] - 2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)\Big[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 - 2\Big] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4). \end{aligned}$$

Quindi $\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = 0$ se e solo se

$$(1-\lambda)(\lambda^2-4) = 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad \lambda = 1 \text{ o } \lambda^2 = 4,$$

cioè se $\lambda = 1, \pm 2$. I tre autovalori hanno quindi molteplicità algebrica e geometrica uguali a uno. Per $\lambda = 1$ l'equazione cartesiana dell'autospazio è

$$(A - \mathrm{Id})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè, facendo semplici calcoli

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

che ovviamente è una retta passante per l'origine; un suo vettore generatore (e in quanto tale autovettore non nullo!) è $v_1 = (1, 2, 0)^T$ e l'equazione parametrica si scrive immediatamente.

Per $\lambda = 2$ l'equazione è

$$(A - 2\mathrm{Id}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè, dato che la terza riga è -2 per la prima più la seconda,

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

un suo vettore generatore/autovettore in questo caso è è $v_2 = (1, -1, 1)^T$.

Per $\lambda = -2$ l'equazione cartesiana dell'autospazio è infine

$$(A + 2\mathrm{Id}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè, dato che due volte la prima riga meno la seconda restituisce la terza moltiplicata per tre,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

e un suo vettore generatore/autovettore non nullo è in questo caso $v_3 = (1, -1, -3)^T$.

Esercizio 5. *Rispondete alle seguenti domande,* **giustificando la risposta***:*

- *Se A è una matrice (reale) 3×3 con* $\det A \neq 0$*, quanti sono i vettori v di $\mathbb{R}^3$ tali che $Av = e_1$?*
- *Siano v_1, v_2 due vettori in $\mathbb{R}^3$. Quanto vale il prodotto scalare tra $v_1 \times v_2$ (questo è il prodotto vettoriale) e $v_1 + v_2$?*
- *Sia w un vettore non nullo. Scrivete l'espressione della proiezione di un vettore v su w.*
- *Quanto vale l'angolo tra i vettori e_2 ed e_3* **in radianti***?*

Soluzione:

- Uno solo, che è dato da $v = A^{-1}e_1$.
- Il prodotto vettoriale tra due vettori ha la caratteristica di essere ortogonale ad entrambi. Quindi
$$\langle v_1 + v_2, v_1 \times v_2 \rangle = \langle v_1, v_1 \times v_2 \rangle + \langle v_2, v_1 \times v_2 \rangle = 0 + 0 = 0.$$
- e_2 ed e_3 sono ortogonali, quindi l'angolo tra di loro è di $\pi/2$.

Esercizio 6. *Rispondete alle seguenti domande.*

- *Scrivete la derivata* **seconda** *della funzione $f(x) = e^{\sin x + \cos x}$.*
- *Scrivete il teorema di Lagrange. In quale caso particolare tale teorema si riduce a quello di Rolle?*

Soluzione:

- $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} e^{\sin x + \cos x} \\ &= e^{\sin x + \cos x} \frac{d}{dx}(\sin x + \cos x) \\ &= e^{\sin x + \cos x}(\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

  e, notando che uno dei due termini l'abbiamo già calcolato sopra

  $$\begin{aligned} f''(x) &= (\cos x - \sin x)\frac{d}{dx} e^{\sin x + \cos x} + e^{\sin x + \cos x}\frac{d}{dx}(\cos x - \sin x) \\ &= (\cos x - \sin x)^2 e^{\sin x + \cos x} - e^{\sin x + \cos x}(\cos x + \sin x) \\ &= \Big[1 - 2\sin x \cos x - \cos x - \sin x\Big] e^{\sin x + \cos x}. \end{aligned}$$

Esercizio 7. *Disegnate un grafico approssimativo della funzione*

$$f(x) = x + \frac{2}{x - \sqrt{2}}$$

dopo averne trovato il dominio naturale di definizione, eventuali simmetrie, le intersezioni con gli assi, l'insieme di positività, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia attraverso lo studio della derivata prima, massimi/minimi relativi e relativi punti di $\max / \min$*, gli intervalli di convessità/concavità attraverso lo studio della derivata seconda (suggerimento: ricordate che se* $f(x) = g(x)+h(x)$*, allora* $f''(x) = g''(x)+h''(x)$*) (***solo ARS 2018/19 e 2019/20** *la convessità).*

Soluzione: Per il dominio, basta imporre che il denominatore non si annulli quindi deve essere $x - \sqrt{2}$ diverso da zero: il dominio naturale è quindi

$$(-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

Dato che non è simmetrico rispetto l'origine, la funzione non ha simmetrie evidenti e nemmeno il suo grafico. Per intersecare con gli assi, innanzitutto calcoliamo $f(0) = -\sqrt{2}$. D'altra parte, per trovare le eventuali controimmagini di zero, conviene fare il denominatore comune:

$$f(x) = \frac{x(x - \sqrt{2}) + 2}{x - \sqrt{2}} = \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 2}{x - \sqrt{2}} = 0$$

se e solo se il numeratore $x^2 - \sqrt{2}x + 2 = 0$, ma il discriminante del polinomio di secondo grado $\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 < 0$ e quindi l'equazione non ha soluzione. Il grafico della funzione quindi non interseca l'asse delle x. Per lo studio della positività è indispensabile considerare la rappresentazione "a denominatore comune". Difatti

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 2}{x - \sqrt{2}} \geq 0$$

e studiamo col grafico dei segni il segno di questa frazione. Il numeratore è positivo se

$$x^2 - \sqrt{2}x + 2 \geq 0$$

e dato che il delta dell'equazione associata è negativo, tale disuguaglianza è verificata per ogni numero x reale. Quindi $x^2 - \sqrt{2}x + 2 \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$. Il denominatore invece è positivo ovviamente se e solo se $x > \sqrt{2}$. Quindi la funzione è positiva in $(\sqrt{2}, +\infty)$ e negativa altrimenti (nel dominio).

Per i limiti agli estremi del dominio, conviene invece forse recuperare la rappresentazione in "somma" della funzione. Difatti dato che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x-\sqrt{2}} = 0$$

allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} x + \frac{2}{x-\sqrt{2}} = \pm\infty.$$

(non è richiesto, ma si vede immediatamente che $y = x$ è asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $-\infty$). Poi

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-} x + \frac{2}{x-\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \lim_{x\to\sqrt{2}^-} \frac{2}{x-\sqrt{2}} = -\infty$$

dato che il denominatore della frazione tende a 0^-. Analogamente

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} x + \frac{2}{x-\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{2}{x-\sqrt{2}} = +\infty.$$

Anche per la derivata, lo stesso:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\Big(x + \frac{2}{x-\sqrt{2}}\Big) = 1 + 2\frac{d}{dx}\frac{1}{x-\sqrt{2}} \\
&= 1 - 2\frac{1}{(x-\sqrt{2})^2} = \frac{(x-\sqrt{2})^2 - 2}{(x-\sqrt{2})^2} \\
&= \frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 - 2}{(x-\sqrt{2})^2} = \frac{x(x-2\sqrt{2})}{(x-\sqrt{2})^2}.
\end{aligned}$$

Il numeratore, similmente a prima, è positivo "per valori esterni", cioè quando $x \le 0$ o $x \ge 2\sqrt{2}$; il denominatore quando $x \ne \sqrt{2}$ (ricordate che non si può annullare...). Quindi la funzione è monotona crescente in $(-\infty, 0]$ e in $[2\sqrt{2}, +\infty)$ e decrescente in $[0, \sqrt{2})$ e in $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ (attenzione! Non è decrescente in $[0, 2\sqrt{2}]$! Perché?). Quindi $x = 0$ è punto di massimo locale (e la funzione vale $-\sqrt{2}$, l'abbiamo calcolato sopra), mentre $x = 2\sqrt{2}$ è di minimo locale e qui la funzione vale

$$f(2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + \frac{2}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Per la derivata seconda, è molto più semplice calcolarla usando il suggerimento, rispetto a derivare l'espressione "a denominatore comune" ricavata sopra. In particolare

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d^2}{d^2x}x + 2\frac{d^2}{d^2x}\frac{1}{x-\sqrt{2}} = -2\frac{d}{dx}\frac{1}{(x-\sqrt{2})^2} \\
&= -2\frac{d}{dx}(x-\sqrt{2})^{-2} = 4(x-\sqrt{2})^{-3} = \frac{4}{(x-\sqrt{2})^3}.
\end{aligned}$$

Essa, semplicemente, è positiva quando il denominatore è (strettamente) positivo, che a sua volta è positivo quando $x - \sqrt{2} > 0$. Quindi la funzione è convessa in $(\sqrt{2}, +\infty)$ e concava in $(-\infty, \sqrt{2})$.

Trovate il grafico della funzione in ultima pagina.

Esercizio 8. *Calcolate*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x} - \frac{x^2}{[\log x]^2}.$$

Soluzione: Dalla gerarchia degli infiniti sappiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\log x} = +\infty$$

e quindi

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{x^2}{[\log x]^2} = -\infty;$$

quindi siamo in presenza di una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Un modo di risolverla è raccogliere:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\log x} - \frac{x^2}{[\log x]^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\log x}\Big(1 - \frac{x}{\log x}\Big) = -\infty$$

perchè a questo punto il limite è della forma $+\infty \times (-\infty)$ che **non** è una forma indeterminata.

Esercizio 9. *Calcolate l'integrale*

$$\int_0^\pi \Big[\cos x + \sin x \cos x + [\sin x]^2 \cos x\Big]\, dx.$$

Soluzione: potete spezzare e calcolare i primi due integrali come integrali immediati (difatti

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

e

$$\begin{aligned}\int \sin x \cos x \, dx &= \frac{1}{2}\int 2 \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\, dx \\ &= \frac{1}{4}\int 2\sin(2x)\, dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + c.\end{aligned}$$

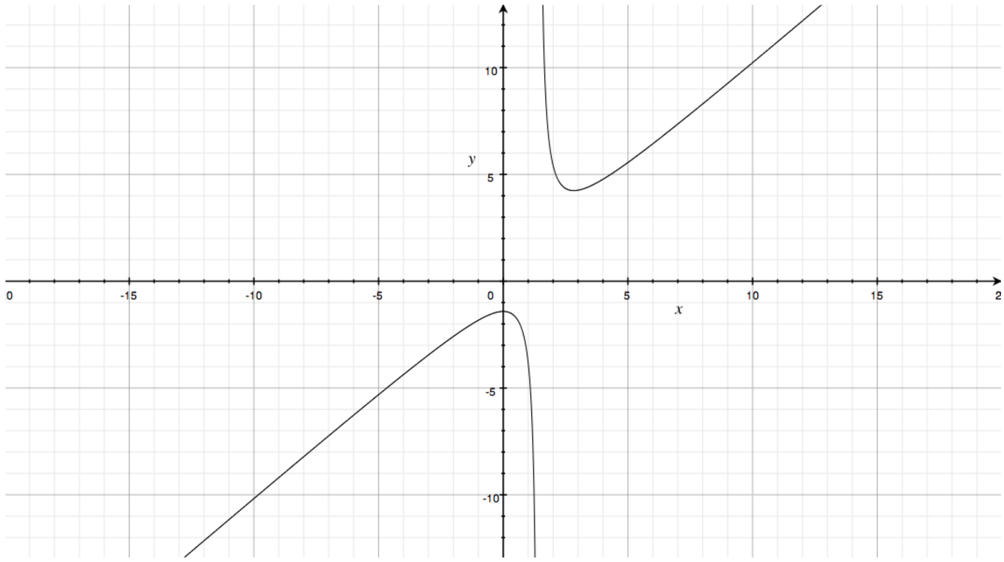
Visto che il terzo richiede in ogni caso la sostituzione $y = \sin x$ ($dy = \cos x \, dx$), tanto vale sostituire nell'integrale di partenza:

$$\begin{aligned}&\int \Big[\cos x + \sin x \cos x + [\sin x]^2 \cos x\Big]\, dx \\ &= \left(\int (1 + y + y^2)\, dy\right)_{y = \sin x} \\ &= \left(y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + c)\right)_{y=\sin x} \\ &= \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3} + c\end{aligned}$$

e quindi l'integrale risulta

$$\left[\sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3}\right]_{x=0}^{\pi} = 0$$

dato che $\sin 0 = \sin \pi = 0$.



y
x
10
5
-5
-10
0
-15
-10
-5
0
5
10
15
2