PRIMO APPELLO SCRITTO DEL CORSO DI FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA E GEOMETRIA

CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ

PARMA, 27.01.20

- ARS, 8CFU, **compito intero**: Esercizi **1,2,3,6,7,9**, durata **2h45'**, punti **4 4 5 3,5 12 4,5**;
- ARS 2019/20, 8CFU, **compitino analisi**: Esercizi **6,7,9,10**, durata **2h**, punti **4 16 7 6**;
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compitino analisi avendo frequentato il corso a.a. 2019/20**: Esercizi **6,7,8,9 (solo parte della primitiva),10**, durata **2h15'**, punti **4 15 5 3 6**;
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compito intero**: Esercizi **1,2,4,5,6,7,8,9**, durata **3h**, punti **3 2,5 4,5 3 3 10 3 4**;
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **analisi**: Esercizi **6,7,8,9**, durata **1h45'**, punti **4 16 6 7**;
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **geometria**: Esercizi **1,2,4,5**, durata **1h30'**, punti **6 5 14 8**.

Il primo esercizio presentava un errore nel testo, e come detto in aula due correzioni erano possibili. Ve le riporto entrambe.

Esercizio 1 (Prima versione). *Trovate l'equazione cartesiana del piano passante per i punti* $P_1 = (1, 1, 0)$ *e* $P_2 = (-2, \sqrt{2}, 1)$ **e parallelo** *alla retta* r *di equazione parametrica*

$$r:\ w = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Trovate inoltre l'equazione cartesiana di r *e la sua intersezione col piano coordinato* xy.

Soluzione: Dato che abbiamo già un vettore generatore del piano, che è il vettore che genera la retta $v_1 = (2, 0, -1)^T$, ci basta trovare l'altro come differenza dei due punti e da qui trovare l'equazione cartesiana. Abbiamo

$$v_2 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e a questo punto possiamo passare dall'equazione parametrica oppure trovare il normale. Se prendiamo la prima strada abbiamo

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

cioè

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ y = 1 + (\sqrt{2} - 1)\lambda_2 \\ z = -\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 1 + 2\lambda_1 - 3(z + \lambda_1) = 1 - 2z - (z + \lambda_1) \\ y = 1 + (\sqrt{2} - 1)(z + \lambda_1) \\ \lambda_2 = z + \lambda_1 \end{cases}$$

(abbiamo sostituito λ_2 nella prima e seconda equazione dalla terza); dato che $z + \lambda_1 = 1 - x - 2z$, concludiamo con l'equazione cartesiana

$$y = 1 + (\sqrt{2} - 1)(1 - x - 2z) \qquad \Leftrightarrow \qquad (\sqrt{2} - 1)x + y + 2z(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}.$$

Altro metodo, più veloce, è notare che otteniamo un normale al piano dal prodotto vettoriale $v_1 \times v_2$:

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & \sqrt{2} - 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -2 \det \begin{pmatrix} e_2 & e_3 \\ \sqrt{2} - 1 & 1 \end{pmatrix} - (-1) \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ -3 & \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \\ &= -2(e_2 - (\sqrt{2} - 1)e_3) + ((\sqrt{2} - 1)e_1 + 3e_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \\ 2(\sqrt{2} - 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'equazione cartesiana del piano è quindi (imponiamo il passaggio per P_1, come sopra)

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \\ 2(\sqrt{2} - 1) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

cioè $(x - 1)(\sqrt{2} - 1) + (y - 1) + 2z(\sqrt{2} - 1) = 0$, che è esattamente la stessa equazione ottenuta sopra.

Per trovare l'equazione cartesiana della retta basta semplicemente eliminare il parametro λ da

$$\begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = 6 \\ z = -5 - \lambda, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R};$$

quindi

$$\begin{cases} x = 7 + 2(-z - 5) \\ y = 6 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x + 2z = -3 \\ y = 6. \end{cases}$$

Infine l'intersezione col piano xy che ha equazione $z = 0$ si ottiene semplicemente mettendo le due equazioni (del piano, e il sistema che identifica la retta) a sistema:

$$\begin{cases} x + 2z = -3 \\ y = 6 \\ z = 0 \end{cases}$$

che ha unica soluzione $(-3, 6, 0)$.

(Seconda versione). *Trovate l'equazione cartesiana del piano passante per i punti* $P_1 = (1,1,0)$ **e ortogonale** *alla retta* r *di equazione parametrica*

$$r:\ w = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Trovate inoltre l'equazione cartesiana di r *e la sua intersezione col piano coordinato* xy*.*

Soluzione: Chiedere ora che il piano sia ortogonale alla retta significa che i vettori normali al piano devono essere linearmente dipendenti (cioè multipli scalari) del vettore generatore della retta. Quindi dovremo avere

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

cioè $2(x-1) - z = 0$, $2x - z = 2$. Il resto dell'esercizio è uguale.

Esercizio 2. *Date le matrici* $A = (1\ 0\ 2)^T \in M^{3\times 1}$ *e* $B = (-1\ \ -1\ \ -\frac{1}{2}) \in M^{1\times 3}$*, calcolate* $AB \in M^{3\times 3}$*,* $\det(AB)$ *e* $\operatorname{rg}(AB)$*.*

Soluzione: Per calcolare il prodotto, che sarà una matrice 3×3, usiamo l'usuale prodotto righe per colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è zero, dato che ha una riga di zeri. Inoltre, per di più, osserviamo che le tre righe sono tutte multiple una dell'altra: in particolare la seconda è uguale alla prima moltiplicata per zero, e la terza uguale alla prima moltiplicata per due. Quindi ogni minore 2×2 estratto avrà le righe proporzionali e come tale, determinante zero. In altre parole, la matrica AB ha rango uno.

Esercizio 3. *Trovate, usando il metodo che preferite, tutte le soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ 3x + y + 2z = 4 \\ -3x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Nel caso siano una retta o un piano, sono richieste sia l'equazione cartesiana che quella parametrica. **Facoltativo***: Sapete trovare le soluzioni del sistema omogeneo (cioè quello con tre zeri a destra) associato?*

Soluzione: Consideriamo la matrice completa; dato che semplicemente dobbiamo trovare le soluzioni, applichiamo direttamente l'algoritmo di Gauss che ci darà sia l'insieme delle soluzioni che l'equazione cartesiana (se non è un punto).

$$(A\,|B\,) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prima sommiamo prima e terza e seconda e terza, e sostituiamo le righe risultanti rispettivamente alla seconda e terza; poi sottraiamo la terza da due volte la seconda; abbiamo

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema è quindi equivalente a

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ 2y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 2z = 3 \\ y = 1; \end{cases}$$

quindi l'insieme delle soluzioni è una retta non passante per l'origine in $\mathbb{R}^3$. Troviamone infine l'equazione parametrica: prima individuiamo due punti della retta, ad esempio ponendo $x = 0$ e $x = 1$ e trovando i corrispondenti valori della variabile z. I due punti sono quindi

$$P_1 = (0, 1, 3/2), \qquad P_2 = (1, 1, 0)$$

e un vettore generatore è la loro differenza, cioè $v = P_2 - P_1 = (1, 0, -3/2)^T$. L'equazione parametrica cercata è quindi

$$w = P_2 + \lambda v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Per il sistema omogeneo, non è necessario fare nuovamente i calcoli. L'insieme delle soluzioni è la retta, parallela alla precedente, passante però per l'origine, che ha quindi equazione cartesiana

$$\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ y = 0; \end{cases}$$

e parametrica

$$w = \lambda v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4. *Considerate l'operatore lineare* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 4z \\ -y \\ 3x + 2z \end{pmatrix};$$

scrivete la matrice associata e trovatene gli autovalori con le loro molteplicità algebrica e geometrica. Infine scrivete le equazioni cartesiane e parametriche dei corrispondenti autospazi.

Soluzione: La matrice associata all'operatore lineare ha come colonne $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$; è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico: sviluppando secondo la seconda riga (o colonna),

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(1+\lambda)\big[(3-\lambda)(2-\lambda) - 12\big] \\ &= -(1+\lambda)\big[6 - 5\lambda + \lambda^2 - 12\big] \\ &= -(1+\lambda)\big[\lambda^2 - 5\lambda - 6\big] \\ &= -(1+\lambda)(\lambda-6)(\lambda+1); \end{aligned}$$

sono quindi $\lambda = 6$ con molteplicità algebrica e geometrica uno e $\lambda = -1$ con molteplicità algebrica due. Studiamoli separatamente.

Caso $\boldsymbol{\lambda = 6}$; in questo caso la matrice associata è

$$A - 6\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

e il sistema che individua gli autovettori

$$\begin{cases} -3x + 4z = 0 \\ -y = 0 \\ 3x - 4z = 0; \end{cases}$$

dato che la prima e la terza equazione differiscono per un fattore moltiplicativo, abbiamo che l'autospazio ha equazione cartesiana

$$\begin{cases} 3x - 4z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ed è una retta in $\mathbb{R}^3$. Troviamone l'equazione parametrica; un vettore generatore è dato da un punto (non l'origine) della retta, che può essere $(4, 0, 3)^T$; quindi l'equazione parametrica è

$$w = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Caso $\boldsymbol{\lambda = -1}$; in questo caso la matrice associata è

$$A + \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e il sistema che individua gli autovettori

$$\begin{cases} 4x + 4z = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases}$$

ed è chiaro che tutto si riduce all'equazione $x + z = 0$ che è individua un piano in $\mathbb{R}^3$; la molteplicità geometrica dell'autovalore è quindi anch'essa due. Infine per trovarne l'equazione parametrica, è sufficiente notare che la normale al piano è $(1, 0, 1)^T$ e due vettori ad essa ortogonali (e indipendenti tra loro) sono $(0, 1, 0)^T$ e $(1, 0, -1)$; quindi una possibile equazione parametrica sarebbe

$$w = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5. *Rispondete alle seguenti domande,* **giustificando la risposta***:*

- *Fate un esempio di quattro vettori in $\mathbb{R}^3$ (tutti diversi tra di loro) tali che il loro sottospazio lineare generato abbia dimensione due.*
- *I punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $y = x + 2$ formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$?*
- *Calcolate il prodotto scalare tra $e_1 + e_2 - e_3$ ed $-e_1 + e_2 + e_3$.*
- *Un piano passante per l'origine può contenere rette* **non** *passanti per l'origine?*

Soluzione:

- Come sottospazio generato possiamo prendere il piano $x = 0$, generato da e_2 ed e_3; i quattro vettori possono quindi essere $e_2, -e_2, e_3, -e_3$ oppure e_2, e_3 e due qualsiasi combinazione lineare dei sopraccitati.
- No, perchè ad un sottospazio vettoriale deve appartenere l'origine, e l'origine non appartiene alla retta.
- $$\left\langle (1, 1, -1)^T, (-1, 1, 1)^T \right\rangle = -1 + 1 - 1 = -1.$$
- Sì, ad esempio in $\mathbb{R}^3$ la retta
  $$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$
  appartiene chiaramente al piano $x = 0$ ma non passa per l'origine.

Esercizio 6. *Rispondete alle seguenti domande.*

- *Disegnate il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che abbia un massimo assoluto in $x = 0$.*
- *Data la funzione $f : I \to \mathbb{R}$, cosa significa che G è una primitiva di f? Oltre a G, sapete trovarne un'altra, diversa da G?*

- *Scrivete l'intervallo aperto e quello chiuso aventi come estremi* 1 *e* 3.
- *Enunciate precisamente il teorema di Rolle e descrivetene brevemente il significato geometrico (in termini del grafico della funzione).*

Soluzione:

- Basta disegnare la parabola $y = x^2$ con la concavità verso il basso, che è il grafico della funzione $f(x) = x^2$.
- Rimando agli appunti, o ai libri.
- L'intervallo chiuso è $[1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\}$ e quello aperto $(1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 3\}$
- Nuovamente, rimando agli appunti o ai libri.

Esercizio 7. *Si disegni un grafico approssimativo della funzione*

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 - 1}$$

dopo averne trovato il dominio naturale di definizione, eventuali simmetrie, le intersezioni con gli assi, l'insieme di positività, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia attraverso lo studio della derivata prima, gli intervalli di convessità/concavità attraverso lo studio della derivata seconda. Indicate esplicitamente eventuali asintoti orizzontali e/o verticali.

Soluzione: La frazione è definita quando il denominatore non sia annulla, quindi se $x^3 \neq 1$; dato che la soluzione di $x^3 = 1$ è solo $x = 1$, $x^3 \neq 1$ significa $x \neq 1$, cioè il dominio massimale è

$$\mathrm{Dom}\,(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$

Dato che il dominio non è simmetrico, la funzione non ha simmetrie. Inoltre $x = 0$ appartiene al dominio, quindi possiamo cercare l'intersezione con l'asse delle y, che è l'origine. D'altra parte, se $f(x) = 0$ allora deve essere il numeratore, x^3, uguale a zero. Quindi ritroviamo l'origine come unica intersezione con l'asse delle x. Studiamo ora il segno della funzione: dobbiamo risolvere

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 - 1} \geq 0.$$

Studiamo separatamente numeratore e denominatore: il numeratore $x^3 \geq 0$ quando $x \geq 0$ (ricordate le proprietà delle potenze; oppure potete studiarlo come prodotto $x^3 = x^2 \cdot x$). Il denominatore invece $x^3 - 1 > 0$ quando $x > 1$ (se volete studiarlo come prodotto, ricordate che dovete considerare che $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Combinando queste informazioni nel grafico dei segni, la funzione è positiva in $(-\infty, 0] \cup (1, \infty)$ e negativa altrove, in $[0, 1)$. Sono quattro a questo punto i limiti da calcolare, anche se quelli a $\pm\infty$ sono identici:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3(1 - 1/x^3)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - 1/x^3} = 1$$

e ugualmente

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^3 - 1} = \cdots = 1.$$

Al finito abbiamo

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{x^3 - 1} = +\infty,$$

dato che il numeratore tende ad uno e il denominatore a 0^+: se $x \to 1^+$ anche $x^3 \to 1^+$. Similmente,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^3-1} = -\infty.$$

Ora calcoliamo la derivata prima:

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^3}{x^3-1} &= \frac{(x^3-1)\frac{d}{dx}x^3 - x^3\frac{d}{dx}(x^3-1)}{(x^3-1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x^3-1) - x^3 \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{-3x^2}{(x^3-1)^2}. \end{aligned}$$

Lo studio del segno della derivata prima è molto semplice, dato che si tratta di una costante negativa, -3, moltiplicata per due quadrati che sono sempre positivi (a parte in $x = 0$ in cui il numeratore vale zero). Quindi $f'(x) < 0$ se $x \neq 0$ appartiene al dominio e la funzione è monotona strettamente decrescente separatamente negli intervalli in cui è definita: in $(-\infty, 1)$ e in $(1, \infty)$. Se non vi convince lo studio del segno della derivata prima fatto così, provate a farlo col grafico dei segni e convincetevi che il risultato è lo stesso.

Per quanto riguarda la derivata, seconda,

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{-3x^2}{(x^3-1)^2} = -3\frac{d}{dx}\frac{x^2}{(x^3-1)^2} = -3\frac{(x^3-1)^2\frac{d}{dx}x^2 - x^2\frac{d}{dx}(x^3-1)^2}{(x^3-1)^4}.$$

Dato che

$$\frac{d}{dx}(x^3-1)^2 = 2(x^3-1)\cdot 3x^2$$

dalla regola della derivazione della funzione composta (oppure potete svolgere il quadrato e poi derivare), abbiamo, concludendo raccogliendo a fattor comune il termine $2x(x^3-1)$

$$\begin{aligned} f''(x) = -3\frac{2x(x^3-1)^2 - 6x^4(x^3-1)}{(x^3-1)^4} &= -3\frac{2x(x^3-1)}{(x^3-1)^4}\left[(x^3-1) - 3x^3\right] \\ &= \frac{6x(2x^3+1)}{(x^3-1)^3}. \end{aligned}$$

Studiamola con il grafico dei segni. Il primo fattore al numeratore, $6x$, è ovviamente positivo in $[0, \infty)$. Il secondo se

$$2x^3 + 1 \geq 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x^3 \geq -\frac{1}{2} \qquad \text{se e solo se} \qquad x \geq -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

che è un numero negativo tra -1 e zero. Infine, il denominatore è positivo se

$$(x^3-1)^3 > 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x^3 - 1 > 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x > 1,$$

come sopra. Concludendo e facendo il grafico dei segni, la derivata seconda è positiva in $[-\sqrt[3]{1/2}, 0]$ e in $(1, \infty)$. La funzione è quindi convessa in questi intervalli.

Possiamo quindi, con un po' di difficoltà, tracciare un grafico della funzione come quello riportato in ultima pagina.

Esercizio 8. *Si calcolino i seguenti limiti:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{x^2}-1}{\log(1+x)}, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x^2-1}}{\log(1+x)}.$$

Soluzione: I primi due sono forme indeterminate (risolvibili usando i limiti notevoli), mentre la terza no: difatti $e^{x^2-1} \to e^{-1} > 0$, quindi, dato che il denominatore tende a 0^+,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x^2-1}}{\log(1+x)} = +\infty.$$

Per il primo abbiamo, dal limite notevole dell'esponenziale,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot x = 0$$

dato che il rapporto tende ad uno. Infine, usando anche il limite notevole del logaritmo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x^2}-1}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x^2}-1}{x}\cdot \frac{x}{\log(1+x)} = 0$$

dato che il primo fattore tende a zero e il secondo a uno.

Esercizio 9. *Si calcoli l'integrale*

$$\int_{-2}^{-1/2} \frac{1}{x}\,dx + \int_{1/2}^{2} \Big[2x^{2/3} + \frac{3}{x^3}\Big]\,dx$$

e si trovi la primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ *che vale* 2 *quando* $x = 0$.

Soluzione: Calcoliamo separatamente

$$\int_{-2}^{-1/2} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(-x)\Big]_{x=-2}^{-1/2} = \ln(1/2) - \ln(2) = -2\ln 2 = \ln(1/4) = -\ln 4,$$

dato che la primitiva di $1/x$, se x è negativo, è $\ln(-x) = \ln|x|$. Abbiamo anche usato le proprietà dei logaritmi, per scrivere il risultato come ci piace di più. Inoltre

$$\begin{aligned}\int \Big[2x^{2/3} + \frac{3}{x^3}\Big]\,dx = 2\int x^{2/3}\,dx + 3\int x^{-3}\,dx &= 2\frac{x^{5/3}}{5/3} + 3\,\frac{x^{-2}}{-2} + c\\ &= \frac{6}{5}\,x^{5/3} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2} + c\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{2} \Big[2x^{2/3} + \frac{3}{x^3}\Big]\,dx = \Big[\frac{6}{5}\,x^{5/3} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2}\Big]_{x=1/2}^{2} &= \frac{6}{5}\,2^{5/3} - \frac{3}{8} - \frac{6}{5}\,(1/2)^{5/3} + 6\\ &= \frac{3(8\sqrt[3]{2}-1)}{5\sqrt[3]{4}} + \frac{45}{8}\end{aligned}$$

(ma non importa fare i calcoli). L'integrale richiesto vale quindi

$$\int_{-2}^{-1/2} \frac{1}{x}\,dx + \int_{1/2}^{2} \Big[2x^{2/3} + \frac{3}{x^3}\Big]\,dx = \frac{3(8\sqrt[3]{2}-1)}{5\sqrt[3]{4}} + \frac{45}{8} - 2\ln 2$$

Per svolgere la seconda parte, troviamo la primitiva generica

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,dx = \int (1-2x)^{-1/2}\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{-1/2}\cdot(-2)\,dx = \Big(\int y^{-1/2}\,dy\Big)_{y=1-2x}$$

con la sostituzione suggerita dalla funziona integranda $y = 1-2x$, da cui $dy = -2\,dx$. Dato che la primitiva vale $y^{1/2}/(1/2) = 2\sqrt{y}$, sostituendo

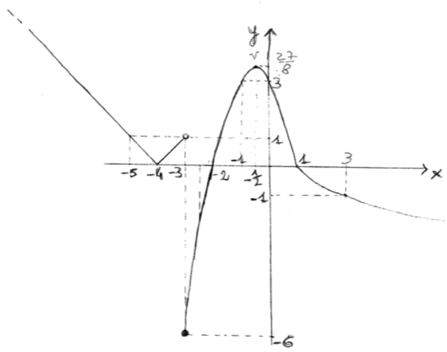
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,dx = -\sqrt{1-2x} + c.$$

Se vogliamo trovare la primitiva che vale due quando $x = 0$, cioè se vogliamo determinare il valore della costante c, sostituiamo

$$\Big[-\sqrt{1-2x} + c\Big]_{x=0} = -1 + c$$

e imponiamo valga 2; quindi $c = 3$ e la primitiva cercata è $G(x) = -\sqrt{1-2x} + 3$ (se volete, verificate che $G(0) = 2$ e $G'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$).

Esercizio 10. *Della funzione f il cui grafico è riportato sotto*



calcolate $f(-4), f(-3), f(1)$. Quante controimmagini ha $y = 1$? $x = -1/2$ è punto di massimo relativo? Assoluto? Quanto vale il minimo assoluto di f? Scrivete gli elementi dell'insieme $f^{-1}(0)$ e calcolate

$$\lim_{x\to -4^+} f(x), \qquad \lim_{x\to -4^-} f(x).$$

Esiste $\lim_{x\to -4} f(x)$? La funzione f è derivabile nel punto $x = -4$?

Soluzione: Abbiamo $f(-4) = 0$, $f(-3) = -6$ (dato che il pallino pieno sta in $(-3, -6)$), $f(1) = 0$. Il valore $y = 1$ ha tre controimmagini: una appena dopo lo zero, una tra -2 e -1 e -5. Osservate che $x = -3$ non è una controimmagine di $y = 1$. $x = -1/2$ è chiaramente punto di massimo relativo: infatti, intorno (in particolare, su $[-6, \infty)$ la funzione assume valori minori. Non è punto di massimo assoluto perchè per x sufficientemente negativo, i valori della funzione eccedono $27/8$. Il minimo assoluto di f (supponendo, come avevo detto a voce in classe, che ci sia un asintoto orizzontale a $+\infty$) è -6. $f^{-1}(0)$ ha come elementi $-4, -2, 1$ (perchè $f(-4) = f(-2) = f(1) = 0$). Si ha

$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^-} f(x) = \lim_{x\to -4} f(x) = 0,$$

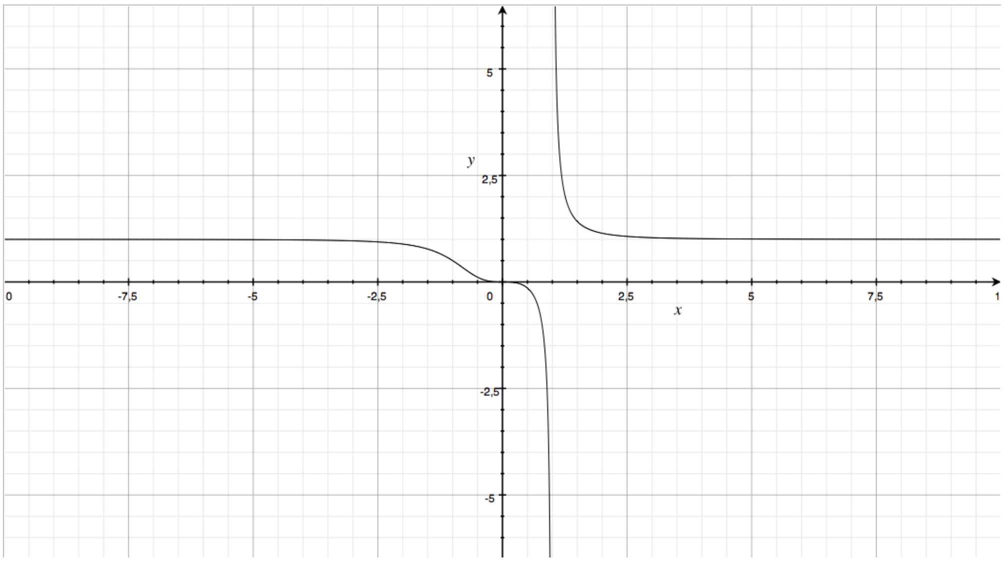
dato che "vicino" al punto $x = -4$, i valori della funzione sono "vicini" al valore zero.

Quando ho scritto l'esercizio avevo in mente la stessa domanda con -3 invece di -4. In questo caso avremmo

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to -3^-} f(x) = -6$$

e il $\lim_{x\to -3} f(x)$ non esisterebbe, dato che limite destro e sinistro sono diversi. In altre parole, intorno al punto $x = -3$ non è possibile "intrappolare" il grafico di f in una striscia orizzontale di ampiezza piccola.

Infine la funzione non è derivabile in $x = -4$ perchè c'è "uno spigolo", ciò significa che il limite destro e sinistro del rapporto incrementale saranno diversi (dato che lì vicino il grafico della funzione è una retta, saranno rispettivamente 1 il limite destro e -1 quello sinistro, esattamente come accade per la funzione $f(x) = |x|$).



5
2,5
y
0
-7,5
-5
-2,5
0
2,5
5
7,5
1
x
-2,5
-5