CORREZIONE DEL SESTO APPELLO SCRITTO DEL CORSO DI FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA E GEOMETRIA

CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ

PARMA, 25.08.20

- ARS, 8CFU: Esercizi **1,2,5,6,9 (solo #1 e #2)**, durata **2h30'**, punti **7,6,4,12,4**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compito intero**: Esercizi **2,3,4,5,6,8,9**, durata **3h**, punti **5,6,2,3,10,3,4**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **analisi**: Esercizi **5,6,7,8,9 (solo #2 e #3)**, durata **2h**, punti **4,14,3,5,7**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **geometria**: Esercizi **1,2,3,4**, durata **1h30'**, punti **9,8,10,6**

Esercizio 1. *Trovare un'equazione parametrica della retta di* $\mathbb{R}^3$ *di equazione cartesiana*

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

e trovare equazioni cartesiana e parametrica del piano π *passante per* $P = (-2, 1, 0)$ *ed ortogonale a tale retta. Quale è la proiezione di tale retta sul piano* π*?*

Soluzione: troviamo un vettore generatore della retta trovando un vettore ortogonale ai due normali dei piani $x - y - z = 1$ (cioè $n_1 = (1, -1, -1)^T$) e $2x - 2y + z - 5 = 0$ (cioè $n_2 = (2, -2, 1)^T$). Abbiamo

$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e_1 \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - e_2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + e_3 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= e_1(-1 - 2) - e_2(1 + 2) + e_3(-2 + 2) \\ &= -3e_1 - 3e_2. \end{aligned}$$

Quindi un vettore generatore generatore della retta è $(-3, -3, 0)^T$ (o anche $(1, 1, 0)^T$. Perché?) e per trovare un'equazione parametrica cerchiamo un punto della retta. Fate attenzione ora: dal vettore generatore sapete che la retta è parallela al piano $z = 0$, quindi è sottoinsieme di un certo piano $z = \text{costante}$. Scegliere quindi la z costante (e poi cercare x e y) non è una scelta furba; se "beccate" la costante giusta allora siete "fortunati", ma in **tutti** gli altri casi vi risulterà un sistema impossibile per la x e la y. Se invece cercate punti con $x = 0$, il "peggio" che vi potrà capitare è che il sistema in y e z sarà impossibile; cioè, la retta sarà parallela anche al piano $x = 0$. In questo caso **sicuramente** imponendo $y = 0$ troverete un punto della retta. **Cercate di capire quello che ho scritto** perché è un ragionamento sottile ma vi garantisce un buon metodo di lavoro generale. Quindi imponendo $x = 0$ abbiamo

$$\begin{cases} -y - z = 1 \\ -2y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - y = z \\ -2y - 1 - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

ed un'equazione parametrica è

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

A questo punto abbiamo già il normale al piano π, che ha quindi equazione cartesiana

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -3(x+2) - 3(y-1)$$

cioè $-3x-3y-6+3 = 0$ cioè $x+y+1 = 0$. Infine, dato che la retta è ortogonale al piano, la sua proiezione su π sarà il loro punto di intersezione che si può trovare o risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x - 2y + z - 5 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

oppure (e questa è la strada più veloce) trovando il valore del parametro λ per cui il punto generico della retta di coordinate

$$\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = -2 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

soddisfa l'equazione cartesiana del piano: deve risultare $-3\lambda - 2 - 3\lambda + 1 = 0$ cioè $\lambda = -1/6$; quindi il punto-proiezione ha cooordinate

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. *Calcolate il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

poi risolvete i tre sistemi

$$\begin{cases} x+3y+3z=1 \\ x+4y+3z=0 \\ x+3y+4z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3y+3z=0 \\ x+4y+3z=1 \\ x+3y+4z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3y+3z=0 \\ x+4y+3z=0 \\ x+3y+4z=1 \end{cases}$$

(osservate che hanno tutti A come matrice incompleta). Infine scrivete la matrice B, che ha come colonne i tre vettori soluzione dei tre sistemi (prima colonna=soluzione del primo sistema, ecc) e verificate che si ha $AB = \mathrm{Id}$.

Soluzione: intanto abbiamo, sviluppando rispetto la prima colonna,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= (16-9) - (12-9) + (9-12) = 7 - 3 - 3 = 1;$$

quindi i tre sistemi sono tutti risolubili e hanno un'unica soluzione. Usiamo l'algoritmo di Gauss per risolvere quindi il primo sistema; per il secondo e il terzo useremo esattamente le stesse manipolazioni e quello che cambierà sarà solamente l'ultima colonna (che però non influisce nell'algoritmo!). Quindi, sostituendo alla seconda la seconda meno la prima e sostituendo alla terza la terza meno la prima

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

cioè il prima sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x+3y+3z=1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$$

cioè la soluzione è $(7,-1,-1)$. Per il secondo, con le stesse manipolazioni della matrice completa, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} x+3y+3z=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

e per l'ultimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} x+3y+3z=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ z=1. \end{cases}$$

Quindi la matrice B risulta

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e si verifica facilmente che $AB =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-3-3 & -3+3 & 21-9-12 \\ 7-4-3 & -3+4 & -3+3 \\ 7-3-4 & -3+3 & -3+4 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}.$$

Esercizio 3. *Data la matrice* 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{scrivete esplicitamente l'operatore} \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e calcolate $T(e_1 - e_3)$. *Trovate gli autovalori con le loro molteplicità algebrica e geometrica. Scrivete equazioni cartesiane e parametriche per i corrispondenti autospazi. Il vettore* $(1,0,0)^T$ *è un autovettore di* T*?*

Soluzione: calcoliamo il prodotto matriciale

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-y+z \\ 2y \\ x-y+3z \end{pmatrix}$$

da cui

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-y+z \\ 2y \\ x-y+3z \end{pmatrix}$$

e quindi

$$T(e_1 - e_3) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi possiamo già dire che $\lambda = 2$ è un autovalore e $(1,0,-1)^T$ è un autovettore. Attenzione! Non possiamo (ancora) dire nulla sulla molteplicità geometrica di $\lambda = 2$, in particolare non sappiamo se è una retta (o un piano). Calcoliamo rispetto la seconda riga

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda \mathrm{Id}) = \det\begin{pmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 1 & -1 & 3-\lambda\end{pmatrix} &= (2-\lambda)\det\begin{pmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{pmatrix}\\ &= (2-\lambda)\Big[(3-\lambda)^2-1\Big]\\ &= (2-\lambda)\big[\lambda^2-6\lambda+8\big]\\ &= -(\lambda-2)^2(\lambda-4).\end{aligned}$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica due e $\lambda = 4$ con molteplicità algebrica e geometrica uno. Vediamo gli autospazi: per $\lambda = 2$ il nucleo dell'operatore $T - 2\mathrm{Id}$ è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x-y+z=0\\ 0=0\\ x-y+z=0\end{cases}$$

che sono un piano, esattamente quello di equazione cartesiana $x - y + z = 0$. Quindi anche la molteplicità geometrica dell'autovalore è due; un vettore generatore l'abbiamo già, troviamone un altro facendo il prodotto vettoriale tra $(1, 0, -1)^T$ e il normale $(1, -1, 1)^T$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\\ &= e_1\det\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} - e_2\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + e_3\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\\ &= -e_1-2e_2-e_3 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Quindi due vettori linearmente indipendenti (perché ortogonali) che generano l'autospazio sono

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

e un'equazione parametrica richiesta è

$$(\star) \qquad w = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Per $\lambda = 4$, usando lo stesso procedimento, abbiamo

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

mentre per l'equazione parametrica osserviamo che il punto $(1, 0, 1)$ appartiene alla retta e quindi è anche un vettore generatore:

$$w = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Infine e_1 non è un autovettore, e ciò si può vedere in almeno due modi: o calcoliamo $T(e_1) = 3e_1 + e_3$ che non è multiplo scalare di e_1 (quindi e_1 **non** è un autovettore) oppure osserviamo che non appartiene a nessuno dei due autospazi, dato che non è multiplo scalare di un generatore della retta e non appartiene al piano in quanto dovremmo avere $\lambda_2 = 0$ in $(\star)$ ma questo è incompatibile con la terza coordinata.

Esercizio 4. *Rispondete alle seguenti domande,* **giustificando la risposta***:*

- *È vero o falso che per tre punti non allineati passa un solo piano?*
- *Scrivete le equazioni cartesiane di due piani paralleli, uno passante per l'origine, uno passante per* $(1, 1, 1)$.
- *Quale è la lunghezza del vettore* $e_1 + (1, \sqrt{2}, -\sqrt{3})^T$*?*
- *Esiste un vettore ortogonale, in* $\mathbb{R}^3$*, sia ad* e_1 *che ad* e_2 *che ad* e_3*?*

Soluzione:

- È vero e ci sono innumerevoli modi di giustificare ciò. Ad esempio se i punti P_1, P_2, P_3 non sono allineati allora i vettori $P_1 - P_2$ e $P_1 - P_3$ sono linearmente indipendenti e il sottospazio da loro generato ha quindi dimensione 2.
- $x = 0$ e $x = 1$, ad esempio.
- $$v = e_1 + (1, \sqrt{2}, -\sqrt{3})^T = (2, \sqrt{2}, -\sqrt{3})^T$$
  da cui
  $$\|v\| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 2 + 3} = 3.$$
- Solo il vettor nullo è ortogonale a questi tre.

Esercizio 5. *Rispondete alle seguenti domande.*

- *Fate un esempio (anche solamente grafico) di una funzione* $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ *per cui cosa significa che* $x_0 = 1$ *sia un punto di massimo relativo* ma non assoluto *per* f.
- *L'intersezione degli intervalli* $(1, 3]$ *e* $[3, +\infty)$ *è . . . e la loro unione è . . . ; l'intersezione degli intervalli* $[1, 3)$ *e* $[3, +\infty)$ *è . . . e la loro unione è . . .*
- *Scrivete la definizione della (o meglio, di una)* **funzione integrale** *di* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *(quella che compare nel Teorema fondamentale del calcolo integrale) ed enunciate il Teorema di Torricelli, spiegate cioè che relazione c'è tra integrale definito di* f *ed una* **qualsiasi** *sua primitiva.*

Esercizio 6. *Disegnate un grafico approssimativo della funzione*

$$f(x) = \frac{x(x^2+1)-1}{x-1}$$

dopo averne trovato il dominio naturale di definizione, eventuali simmetrie, le intersezioni con gli assi, l'insieme di positività (suggerimento: il numeratore è positivo sulla semiretta $[x_0, +\infty)$ *con* $x_0 \approx 0,7$*), i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia attraverso lo studio della derivata prima, massimi/minimi relativi e relativi punti di* $\max / \min$*, gli intervalli di convessità/concavità attraverso lo studio della derivata seconda. Il punto* $(0,1)$ *appartiene al grafico di* f*? Perché? Quale è l'equazione della retta tangente al grafico in tale punto?*

Soluzione: il dominio è semplice, dato che imporre che il denominatore non si annulli significa chiedere che sia $x \neq 1$; abbiamo

$$\mathrm{Dom}\, f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

Dato che esso non è simmetrico, la funzione non avrà simmetrie particolari. Per le intersezioni con gli assi, calcoliamo

$$f(0) = 1$$

mentre $f(x) = 0$ se il numeratore si annulla e dal suggerimento che ciò accade quando $x \approx 0,7$. Per l'insieme di positività, sapendo il segno del numeratore e il fatto che il denominatore è positivo su $(1, +\infty)$, abbiamo che $f(x) \geq 0$ su

$$(-\infty, x_0] \cup (1, +\infty)$$

con $x_0 \approx 0,7$, dopo aver fatto il grafico dei segni. I limiti a $\pm\infty$ sono analoghi:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(x^2+1)-1}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x} \frac{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty,$$

mentre

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x(x^2+1)-1}{x-1} = -\infty$$

dato che il numeratore tende a uno e il denominatore a 0^-. Analogamente

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x(x^2+1)-1}{x-1} = +\infty.$$

Per la monotonia calcoliamo la derivata prima.

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{x(x^2+1)-1}{x-1} &= \frac{\frac{d}{dx}(x^3+x-1)(x-1) - (x^3+x-1)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(3x^2+1)(x-1) - (x^3+x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^3 + x - 3x^2 - 1 - x^3 - x + 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Quindi $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 3/2$ e quindi la funzione è crescente su $[3/2, +\infty)$ e decrecente su $(-\infty, 1)$ e su $(1, 3/2]$. Il punto $x = 3/2$ è quindi un punto di minimo relativo (poichè la funzione è illimitata inferiormente) e la funzione in tale punto vale

$$f(3/2) = \left.\frac{x(x^2+1)-1}{x-1}\right|_{x=3/2} = \frac{\frac{3}{2}(\frac{9}{4}+1)-1}{\frac{3}{2}-1} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{13}{4} - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{4}.$$

Per gli intervalli di concavità/convessità deriviamo ancora:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} \\
&= \frac{\frac{d}{dx}[x^2(2x-3)](x-1)^2 - x^2(2x-3)\frac{d}{dx}(x-1)^2}{(x-1)^4} \\
&= \frac{[2x(2x-3)+2x^2](x-1)^2 - 2x^2(2x-3)(x-1)}{(x-1)^4} \\
&= \frac{6x(x-1)^2 - 2x^2(2x-3)}{(x-1)^3} \\
&= \frac{2x[3(x-1)^2 - x(2x-3)]}{(x-1)^3} \\
&= \frac{2x[3x^2-6x+3-2x^2+3x]}{(x-1)^3} \\
&= \frac{2x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3}.
\end{aligned}
$$

Per studiarne il segno studiamo separatamente i due fattori al numeratore e il denominatore:

$$N_1 = 2x \geq 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x \geq 0;$$

$$N_2 = x^2 - 3x + 3 \geq 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

dato che il discriminante $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 3$ è negativo e la concavità della parabola associata verso l'alto;

$$D = (x-1)^3 > 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x > 1$$

poichè $(x-1)^3 > 0$ se e solo se $x - 1 > 0$. Quindi mettendo queste informazioni nel grafico dei segni abbiamo

$$f''(x) \geq 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x > 1 \quad \text{o} \quad x \leq 0.$$

Queste informazioni ci permettono di tracciare un grafico simile a quello che vedete in ultima pagina (notate le scale diverse tra l'asse delle x e quello delle y).

Infine per verificare se il punto $(0, 1)$ appartiene al grafico di f, bisogna verificare se è vero che $1 = f(0)$. Dato che in effetti ciò è vero (vedete le intersezioni con gli assi), il punto appartiene. Quindi è possibile scrivere l'equazione della retta tangente, che in generale è

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{e nel nostro caso} \quad y = f'(0)x + 1;$$

dato che

$$f'(0) = \left.\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}\right|_{x=0} = 0$$

la retta tangente è orizzontale e ha equazione $y = 1$.

Esercizio 7. *Calcolate*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x^3 + 1}{x^3 + x^3 \ln|x|}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + x^3 + 1}{x^3 + x^3 \ln|x|}.$$

Soluzione: per il primo limite, dato che è una forma indeterminata ∞/∞, la gerarchia degli infiniti ci dice che al numeratore l'infinito più veloce è e^x e al denominatore $x^3 \ln|x|$

(che comunque è "poco più" di x^3). Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x^3+1}{x^3+x^3\ln|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3\ln x}\frac{1+\frac{x^3}{e^x}+\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{\ln x}+1}=+\infty,$$

dato che la seconda frazione tende a $1/1=1$ se $x\to+\infty$. La prima frazione diverge, ad esempio perché

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^4}\frac{x^4}{x^3\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^4}\frac{x}{\ln x}$$

e dovreste sapere, sempre per la gerarchia degli infiniti, che entrambe le frazioni divergono a $+\infty$. Per il secondo limite, siamo sempre in presenza di una forma indeterminata ∞/∞ ma l'infinito dominante al numeratore in questo caso è x^3 dato che e^x tende a 0 per $x\to-\infty$. Quindi

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x^3+1}{x^3+x^3\ln|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3\ln x}\frac{\frac{e^x}{x^3}+1+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{\ln x}+1}=0,$$

dato che la prima frazione è infinitesima e la seconda tende ad uno.

Esercizio 8. *Per quale valore di $a\in\mathbb{R}$ la funzione*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{2\ln(1+x^2)}+2 & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$$

è continua su $\mathbb{R}$? Per tale valore, essa risulta anche derivabile in $x_0=0$ (usate la definizione di derivata)? (Oss: se usate de l'Hopital dovete spiegare perché!)

NOTA IMPORTANTE: ho chiesto al prof. Morini che mi ha confermato che negli ultimi anni gli sviluppi di Taylor non erano in programma. Dato che erano richiesti per risolvere la seconda parte dell'esercizio, ho tenuto questa fuori dalla valutazione. Se l'avete rispolto **correttamente** usando de l'Hopital sono punti extra rispetto i 33 punti standard del compito completo.

Soluzione: osserviamo che al di fuori dall'origine f, che è uguale a $\frac{1-\cos x}{2\ln(1+x^2)}+2$, è una funzione continua e derivabile infinite volte. Quindi per la continuità su $\mathbb{R}$ è sufficiente imporre il valore di a che renda il limite in zero di f uguale ad a. Quindi calcoliamo usando i limiti notevoli

$$\lim_{x\to0}f(x)=2+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}=2+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}=2+\frac{1}{4}$$

dato che

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{x\to0}\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}=1;$$

quindi deve essere $a=9/4$. Per questo valore il rapporto incrementale in zero vale

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\frac{1-\cos h}{2\ln(1+h^2)}+2-2-\frac{1}{4}}{h}=\frac{2(1-\cos h)-\ln(1+h^2)}{4h\ln(1+h^2)}$$

Sviluppando con Taylor abbiamo

$$2(1-\cos h)=h^2-\frac{h^4}{12}+o(h^4),\qquad \ln(1+h^2)=h^2+\frac{h^4}{4}+o(h^4)$$

e quindi

$$\frac{2(1-\cos h)-\ln(1+h^2)}{4h\ln(1+h^2)}=\frac{-\frac{h^4}{3}+o(h^4)}{h^3+o(h^3)}\to 0$$

se $h \to 0$; quindi la funzione è derivabile nell'origine ed ha derivata uguale a zero.

Esercizio 9. *Calcolate gli integrali*

$$\int_1^e \left[\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right] dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx, \qquad \int x(x+1)e^{x^2}\, dx.$$

(suggerimento per il terzo: spezzate ed integrate per parti scegliendo opportunamente g')

Altra nota: scusate, c'era un errore tipografico nell'ultimo integrale, la funzione integranda sarebbe dovuta essere $x(x^2+1)e^{x^2}$. Dato che è un errore mio, tale esercizio è automaticamente valutato corretto per tutti.

Soluzione: per il primo abbiamo

$$\int \left[\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right] dx = \frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+2\ln|x|-\frac{2}{x}+c$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int_1^e \left[\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right] dx &= \left[\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+2\ln x-\frac{2}{x}\right]_{x=1}^{e} \\ &= \frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}+\frac{e^3}{6}-\frac{1}{6}+2-\frac{2}{e}+2 \\ &= \frac{e^2}{4}+\frac{e^3}{6}-\frac{2}{e}+\frac{43}{12}.\end{aligned}$$

Per il secondo usiamo sostituzione, dato che $\cos x$ è la derivata di $\sin x$: conviene quindi porre $y = \sin x,\ dy = \cos x\, dx$ da cui

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx = \Big(\int \frac{1}{1+y^2}\, dx\Big)_{y=\sin x} = \big(\arctan y\big)_{y=\sin x} + c$$

da cui

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx = \arctan(\sin(\pi/2)) - \arctan(\sin(0)) = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Per il terzo abbiamo

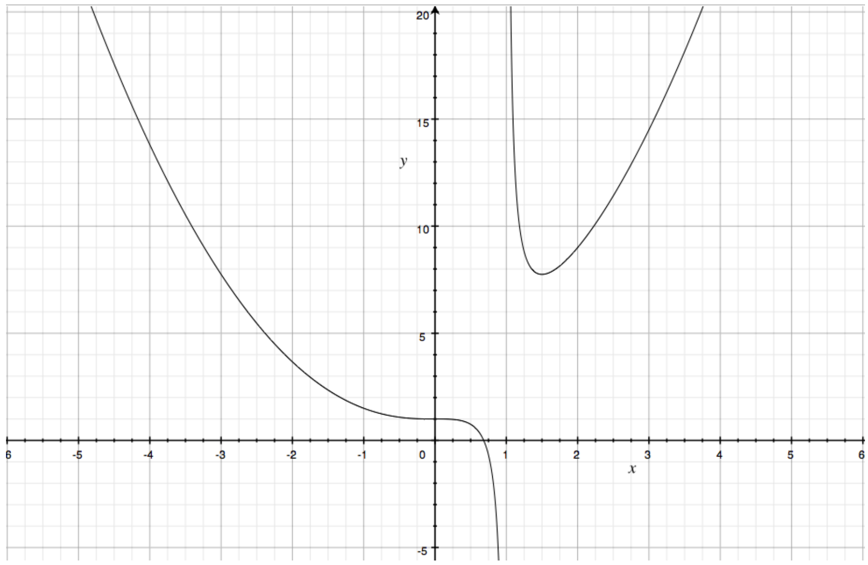
$$\int x(x^2+1)e^{x^2}\, dx = \int x^3 e^{x^2}\, dx + \int x e^{x^2}\, dx.$$

Il secondo è molto facile:

$$\int x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c,$$

per il primo dobbiamo integrare per parti in maniera furba, usando $f(x) = x^2$ e $g'(x) = xe^{x^2}$ in modo tale che (lo vedete sopra) $g(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$. Quindi

$$\int x^3 e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int 2x\cdot\frac{1}{2}e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$$


y
x
20
15
10
5
-5
6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6