CORREZIONE DEL QUINTO APPELLO SCRITTO DEL CORSO DI FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA E GEOMETRIA

CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ

PARMA, 20.07.20

- ARS, 8CFU: Esercizi **1,2,3,6,7,9 (solo #1)**, durata **2h**, punti **5,4,4,5,12,3**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compito intero**: Esercizi **1,3,4,5,6,7,9**, durata **2h30'**, punti **3,3,5,2,4,12,4**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **analisi**: Esercizi **6,7,8,9**, durata **1h45'**, punti **5,16,6,6**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **geometria**: Esercizi **1,3,4,5**, durata **1h15'**, punti **9,7,10,7**

Esercizio 1. *I quattro punti di* $\mathbb{R}^3$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sono complanari, cioè esiste un piano a cui appartengono tutti e quattro? Se sì, trovare equazioni parametrica e cartesiana del **piano** *a cui appartengono. Se no, trovare equazioni parametriche e cartesiane delle* **due rette** *a cui appartengono, rispettivamente* P_1, P_2 *e* P_3, P_4.

Soluzione: L'esercizio, come il primo dello scorso scritto (27.06.20), ha (almeno) due possibili soluzioni. Vi propongo solo la prima, per il ragionamento logico che porta alla seconda (i conti sono gli stessi) vi rimando alla correzione precedente. Si parte dall'osservazione che quattro punti sono complanari se tre vettori che si ottengono facendo la differenza di tre coppie distinte di punti sono linearmente dipendenti. Ciò segue se avete ben capito un piano come traslazione di un piano passante per l'origine, e il fatto che un piano passante per l'origine è il sottospazio generato da due (e non da tre!) vettori indipendenti. Quindi dobbiamo verificare che

$$v_1 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = P_4 - P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

siano linearmente dipendenti, e il modo più veloce per farlo è verificare che la matrice che ha i tre vettori come righe (o colonne) abbia determinante nullo. Quindi calcoliamo (secondo la seconda colonna)

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 + 2 \cdot (-1) = 0;$$

quindi i vettori sono dipendenti e i punti complanari. Scegliamo due vettori (ad esempio v_1, v_2) e troviamo l'equazione parametrica del piano:

$$w = P_1 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R};$$

da ciò

$$\begin{cases} x = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ y = -2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ z = -1 + \lambda_1 \end{cases} \qquad \text{se e solo se} \qquad \begin{cases} x = -(z+1) + \lambda_2 \\ y = -2 + z + 1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 = z + 1 \end{cases}$$

e quindi l'equazione cartesiana del piano risulta $y = -2 + z + 1 + 2(x + z + 1)$, ovvero $2x - y + 3z + 1 = 0$.

Esercizio 2. *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

scrivete A^T *(la trasposta di* A*) e calcolate* A^2, AA^T, $\det(A)$, $\operatorname{rank}(A)$, $\det(A^2)$ *e* $\det(A^3)$ *(dove ovviamente* $A^2 = AA$ *e* $A^3 = AAA$ *cioè* A *moltiplicata per se stessa un numero opportuno di volte).*

Soluzione: A^T si ottiene facendo diventare le righe di A colonne; quindi

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo A^2 col prodotto righe per colonne (non riporto tutti i passaggi):

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+2-1 & 1-2-3 & -1-1-1 \\ 2-4-1 & 2+4-3 & -2+2-1 \\ 1+6+1 & 1-6+3 & -1-3+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \\ 8 & -2 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e (notate che, dalle definizioni, nella posizione ii, $i = 1, 2, 3$ del prodotto trovate la norma al quadrato della i-esima riga)

$$\begin{aligned}
AA^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 2-2+1 & 1+3-1 \\ 2-2+1 & 5 & 2-6-1 \\ 1+3-1 & 2-6-1 & 11 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \\ 3 & -5 & 11 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(notate che AA^T è simmetrica, cioè uguale alla sua trasposta). Infine

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= -2+3-2-1-6-2 = -10.
\end{aligned}$$

Scrivevo infine perché dovreste sapere che $\det(A^2) = [\det(A)]^2 = (-10)^2 = 100$ e $\det(A^3) = [\det(A)]^3 = (-10)^3 = -1000$.

Esercizio 3. *Trovate l'insieme delle soluzioni dei due sistemi*

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} , \qquad \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ -4x - 6y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

e l'insieme dei punti che li risolvono entrambi.

Soluzione: Dato che il primo è un sistema omogeneo, conviene immediatamente usare l'algoritmo di Gauss sulla matrice incompleta: sottraendo la seconda riga alla terza e la prima alla seconda,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi il rango della matrice incompleta è due, il sistema ha un "insieme" di soluzioni di dimensione $3 - 2 = 1$ cioè una retta che ha equazione cartesiana

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

La matrice completa del secondo è invece (potete anche vederla senza la riga di zeri se volete)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sommando due volte la prima riga alla seconda e sostituendo la seconda con il risultato. Quindi la soluzione del secondo sistema è il piano $2x + 3y - z = 1$. Infine l'intersezione dei due sistemi è la soluzione del sistema che si ottiene mettendo a sistema le equazioni del piano e della retta, per definizione di intersezione:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \\ 2x + 3y - z = 1; \end{cases}$$

chiaramente questo sistema si può risolvere per sostituzione da cui

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ 3x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Quindi il solo punto $(1/3, 0, -1/3)$ è soluzione di entrambi i sistemi.

Esercizio 4. *Data la matrice* 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{scrivete esplicitamente l'operatore} \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e calcolate $T(2e_1 + 3e_3)$. *Trovate gli autovalori con le loro molteplicità algebrica e geometrica. Scrivete equazioni cartesiane e parametriche per i corrispondenti autospazi. Ci sono autospazi ortogonali?*

Soluzione:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z \\ 0 \\ 3x + 2z \end{pmatrix}.$$

In particolare

$$T\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2\cdot 3\\0\\3\cdot 2+2\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\12\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}.$$

Osservate quindi che 4 dovrà essere un autovalore! Calcoliamo, ovviamente sviluppando rispetto la seconda riga (o colonna)

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda\mathrm{Id}) &= \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 2\\0 & -\lambda & 0\\3 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix}\\ &= -\lambda\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\3 & 2-\lambda\end{pmatrix}\\ &= -\lambda\left[(1-\lambda)(2-\lambda)-6\right]=-\lambda\left[\lambda^2-3\lambda+2-6\right]\\ &= -\lambda\left[\lambda^2-3\lambda-4\right]=-\lambda\,(\lambda-4)(\lambda+1).\end{aligned}$$

Come vedete $\lambda=4$ è un autovalore, così come $\lambda=-1$ e $\lambda=0$, tutti con molteplicità algebrica e geometrica uno. Per l'autospazio relativo a $\lambda=4$ non c'è bisogno di fare conti, dato che avete già l'autovettore relativo $2e_1+3e_3$; quindi l'equazione parametrica della retta sarà

$$w=\lambda\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix},\qquad\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

e quella cartesiana

$$\begin{cases}3x-2z=0\\ y=0.\end{cases}$$

Per $\lambda=0$ l'autospazio è il nucleo dell'operatore T, cioè l'insieme dei $v=(x,y,z)^T$ t.c. $Tv=(0,0,0)^T$. Quindi

$$\begin{cases}x+2z=0\\ 3x+2z=0\end{cases}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\begin{cases}x=0\\ z=0\end{cases}$$

che è la retta coordinata generata dal vettore e_2 (difatti

$$T\begin{pmatrix}0\\ \lambda\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$). Infine per calcolare l'autospazio relativo a $\lambda=-1$ non ci sono scorciatoie, e dobbiamo calcolare

$$A+\mathrm{Id}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\3 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

da cui l'autospazio ha equazione cartesiana

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ y = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0; \end{cases}$$

l'equazione parametrica è chiaramente

$$w = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Infine, dai vettori generatori delle rette, si vede facilmente che l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 0$ è ortogonale agli altri due autospazi.

Esercizio 5. *Rispondete alle seguenti domande,* **giustificando la risposta***:*

- *Se avete* **due** *sistemi di tre variabili in tre incognite e considerate l'insieme dei punti che risolvono entrambi, questo può essere costituito da tre punti?*
- *Scrivete quattro vettori non nulli di* $\mathbb{R}^4$ *mutualmente ortogonali (nel senso che ognuno è ortogonale a tutti gli altri).*
- *Quanto vale l'angolo tra i vettori* e_1 *ed* $e_1 + e_2$ **in radianti***?*

Soluzione:

- No, perché, se volete una risposta astratta, le soluzioni sono sottospazi affini, e la loro l'intersezione è la traslata dell'intersezione di due sottospazi vettoriali, che è un sottospazio vettoriale. Un sottospazio vettoriale non può avere tre punti. Se volete una riposta concreta, considerate tutti i casi: intersezione di due volte $\mathbb{R}^3$ con uno tra $\mathbb{R}^3$, un piano o una retta ha infiniti punti; intersezione di $\mathbb{R}^3$ con un punto è un punto, intersezione di piano e piano o retta o è vuota o ha infiniti punti; intersezione di rette o è vuota o ha un punto; nei rimanenti casi in cui uno dei due sistemi non sia risolubile, l'intersezione è l'insieme vuoto. Quindi in tutti i casi, o sono infiniti punti, o è un punto, o è vuota.
- I vettori della base ortonormale: e_1, e_2, e_3, e_4.
- Dato che entrambi i vettori appartengono al piano $z = 0$, il problema è planare ed è facile verificare che l'angolo è di $\pi/4$. Altrimenti il prodotto scalare tra i due vettori è uno, il prodotto delle norme $\sqrt{2}$ e l'angolo il cui coseno è $1/\sqrt{2}$ è ancora $\pi/4$.

Esercizio 6. *Rispondete alle seguenti domande.*

- *Data una funzione* $f : (0, 2) \to \mathbb{R}$*, cosa significa che* $x_0 = 1$ *è un punto di massimo assoluto per* f*?*
- *L'intersezione degli intervalli* $(1, 3)$ *e* $(-1, 2]$ *è ... e la loro unione è ....*
- *Scrivete il teorema dell'esistenza degli zeri per le funzioni continue. Mostrate un esempio di funzione* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *discontinua solo in* $x = 1/2$ *con* $f(0) > 0$*,* $f(1) < 0$ *ma che non si annulla mai in* $[0, 1]$.

Soluzione:

- $(1, 3) \cap (-1, 2] = (1, 2]$ e $(1, 3) \cup (-1, 2] = (-1, 3)$.

Esercizio 7. *Disegnate un grafico approssimativo della funzione*

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x^2 + x + 2}$$

dopo averne trovato il dominio naturale di definizione, eventuali simmetrie, le intersezioni con gli assi, l'insieme di positività, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia attraverso lo studio della derivata prima, massimi/minimi relativi e relativi punti di $\max / \min$*, gli intervalli di convessità/concavità attraverso lo studio della derivata seconda (suggerimento:* **nella positività** *della derivata seconda devono comparire numeri con* $\sqrt{21}$*...).*

Soluzione: Osserviamo innanzitutto che

$$(\star) \qquad f(x) = \frac{x^2 + x + 2 - 4}{x^2 + x + 2} = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 2},$$

il che sarè utile in seguito.

Per il dominio, dobbiamo imporre che il denominatore non si annulli. Ma calcolando il discriminante di $x^2 + x + 2$ risulta $\Delta = 1 - 8 = -7$ negativo, quindi l'equazione di secondo grado $x^2 + x + 2 = 0$ non ha soluzioni, e quindi il denominatore non si annulla mai, e quindi il dominio naturale della funzione è tutto $\mathbb{R}$. Per le simmetrie calcoliamo

$$f(-x) = 1 - \frac{4}{(-x)^2 - x + 2} = 1 - \frac{4}{x^2 - x + 2}$$

che è diversa sia da $f(x)$ che da $-f(x)$, quindi la funzione non ha simmetrie significative. Procediamo con le intersezioni con gli assi:

$$f(0) = 1 - \frac{4}{2} = -1$$

mentre $f(x) = 0$ se e solo se il numeratore in $(\star)$ si annulla, cioè se $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) = 0$ (potete anche usare la formuletta per risolvere le equazioni di secondo grado). Quindi i tre punti $(-2, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, -1)$ appartengono al grafico della funzione. Per la positività conviene (anzi, è necessario) utilizzare l'espressione in $(\star)$: dato che il denominatore è sempre strettamente positivo (difatti l'equazione associata non ha soluzioni)

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 2} \geq 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x^2 + x - 2 \geq 0$$

e tale disequazione è soddisfatta per valori esterni alle due radici (che abbiamo già calcolato). Quindi

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x \leq -2 \quad \text{o} \quad x \geq 1.$$

Gli unici limiti agli estremi del dominio che dobbiamo calcolare sono quelli a $\pm\infty$ e forse in questo caso è più evidente considerare

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(1 + 1/x - 2/x^2)}{x^2(1 + 1/x + 2/x^2)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + 1/x - 2/x^2}{1 + 1/x + 2/x^2} = 1;$$

quindi $y = 1$ è un asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Calcoliamo ora la derivata prima:

$$f'(x) = -4\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2 + x + 2} = -4\frac{-(2x + 1))}{(x^2 + x + 2)^2} = \frac{4(2x + 1)}{(x^2 + x + 2)^2}$$

e tale funzione è positiva, ovviamente, se e solo se $x \geq -1/2$. Quindi la funzione è decrescente su $(-\infty, -1/2]$ e crescente su $[1/2, +\infty)$ e $x = -1/2$ è un punto (l'unico) di minimo relativo in cui la funzione vale

$$f(-1/2) = 1 - \frac{4}{(-1/2)^2 - 1/2 + 2} = 1 - \frac{4}{1/4 + 3/2} = 1 - \frac{16}{7} = -\frac{9}{7}.$$

Per la concavità, deriviamo un'altra volta ed abbiamo

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 4\frac{d}{dx}\frac{2x+1}{(x^2+x+2)^2} \\
&= 4\frac{d}{dx}\frac{2(x^2+x+2)^2-(2x+1)\cdot 2(x^2+x+2)(2x+1)}{(x^2+x+2)^4} \\
&= 8\frac{d}{dx}\frac{(x^2+x+2)-(2x+1)^2}{(x^2+x+2)^3} \\
&= 8\frac{d}{dx}\frac{x^2+x+2-4x^2-4x-1}{(x^2+x+2)^3} \\
&= 8\frac{d}{dx}\frac{-3x^2-3x+1}{(x^2+x+2)^3}.
\end{aligned}
$$

Studiamo separatamente i segni di numeratore e denominatore: abbiamo

$$N = -3x^2 - 3x + 1 \geq 0$$

per valori interni alle radici che sono

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{-6} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{-6} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}$$

cioè $x_1 = (-3-\sqrt{21})/6 \approx -1,25$ e $x_2 = (-3+\sqrt{21})/6 \approx 0,25$. Il denominatore invece

$$D = (x^2+x+2)^3 \geq 0$$

se e solo se $x^2+x+2 \geq 0$ ma abbiamo già visto che ciò accade per ogni numero $x \in \mathbb{R}$. Quindi, concludendo, f è convessa dove $N \geq 0$ cioè nell'intervallo

$$\left[\frac{-3-\sqrt{21}}{6}, \frac{-3+\sqrt{21}}{6}\right]$$

e concava in ognuna delle due semirette "esterne"

$$\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{21}}{6}\right], \qquad \left[\frac{-3+\sqrt{21}}{6}, +\infty\right).$$

Trovate il grafico di f, che dovreste riuscire a costruire in base a queste informazioni, in ultima pagina.

Esercizio 8. *Calcolate*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(\cos x)-1}-1}{x}, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{e^{\ln(1+2x)}-1}{x}.$$

Soluzione: Il primo limite presenta una forma indeterminata "zero su zero" (difatti $\cos x - 1 \to 0$) che si risolve utilizzando i limiti notevoli: prima quello dell'esponenziale

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(\cos x)-1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{(\cos x)-1}-1}{\cos x - 1}\cdot\frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}$$

dato che il limite della prima frazione per $x \to 0$ è uno. Poi col limite notevole del coseno

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}\cdot x = 0$$

dato che il limite della prima frazione vale $-1/2$.

Il secondo invece **non è** una forma indeterminata: per le proprietà di logaritmi-esponenziali

$$\frac{e^{\ln(1+2x)}-1}{x} = \frac{1+2x-1}{x} = 2.$$

per $x > -1/2$ e quindi
$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{\ln(1+2x)} - 1}{x} = 2.$$

Esercizio 9. *Calcolate gli integrali*
$$\int \left[\sin x + \frac{1}{2} x \sin(x^2)\right] dx, \qquad \int x^2 \sin x \, dx.$$

Soluzione: Per il primo, ovviamente
$$\int \left[\sin x + \frac{1}{2} x \sin(x^2)\right] dx = \int \sin x \, dx + \frac{1}{2} \int x \sin(x^2) \, dx;$$
il primo è ovvio mentre per il secondo usiamo la sostituzione: dato che se $y = x^2$ allora $2x\,dx = dy$,
$$\int x \sin(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(x^2) 2x \, dx = \frac{1}{2} \left(\int \sin y \, dy \right)_{y=x^2} = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + c.$$
Quindi
$$\int \left[\sin x + \frac{1}{2} x \sin(x^2)\right] dx = -\cos x - \frac{1}{4} \cos(x^2) + c.$$
Per il secondo integrale è necessario integrare per parti: integrando $\sin x$ e derivando x^2, abbiamo
$$\int \int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx$$
ed a sua volta, nuovamente per parti
$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c;$$
quindi
$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c.$$