CORREZIONE DEL TERZO APPELLO SCRITTO DEL CORSO DI FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA E GEOMETRIA

CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ

PARMA, 16.04.20

- ARS, 8CFU, **compito intero**: Esercizi **1,2,3,6,7,8**, durata **2h15'**, punti **4,5,4,5,11,4**.
- ARS 2019/20, 8CFU, **compitino analisi**: Esercizi **6,7,8,9**, durata **1h45'**, punti **2,3,5,3,5,12,3**.
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compitino analisi avendo frequentato il corso a.a. 2019/20**: Esercizi **6,7,8,9**, durata **1h45'**, punti **6,14,6,7**.
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compito intero**: Esercizi **2,3,4,5,6,7,8**, durata **2h30'**, punti **2,3,5,3,5,12,3**.
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **analisi**: Esercizi **6,7,8**, durata **1h30'**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **geometria**: Esercizi **1,2,3,4,5**, durata **1h10'**, punti **6,7,6,8,6**.

Esercizio 1. *Data la retta in $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana*

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z - 1 = 0, \end{cases}$$

trovarne due punti distinti e una sua equazione parametrica. Tale retta passa per l'origine?

Soluzione: Per trovare due punti basta che scegliamo valori arbitrari (ad esempio zero...) per una delle variabili e ricavare le altre due (attenzione! Non è detto funzioni sempre: il sistema 2×2 risultante potrebbe essere impossibile... Avete in mente un esempio?). Proviamo $z = 0$; x e y dovranno risolvere

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ \frac{1}{2}x - 1 = 0, \end{cases}$$

e questo sistema è chiaramente risolubile ed ha soluzione $(2, -2)$. Quindi uno dei punti della retta è $P_1 = (2, -2, 0)$. Prendiamo $x = 0$ ora e cerchiamo di risolvere

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -\frac{1}{2}z - 1 = 0; \end{cases}$$

anche in questo caso abbiamo soluzione che ci da il punto della retta $P_2 = (0, -2, -2)$. Un vettore direttore è $P_2 - P_1$, ad esempio, e questo, insieme al passaggio per P_1 restituisce l'equazione parametrica

$$w = P_1 + \lambda\big(P_2 - P_1\big) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\lambda \\ -2 \\ -2\lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dall'equazione cartesiana, infine, deduciamo che la retta non passa per l'origine in quanto la terna $(0,0,0)$ non risolve la seconda equazione.

Esercizio 2. *Trovare equazioni cartesiana e parametrica del piano di* $\mathbb{R}^3$ *passante per* $P = (1,1,-1)$ *ed avente un vettore normale* $e_2 - e_3$. *Che oggetto geometrico è l'intersezione tra tale piano ed il piano* $x = 0$ *(cioè è un punto, una retta, un piano? Passante o meno per l'origine?)? Scrivetene l'equazione cartesiana.*

Soluzione: L'equazione cartesiana è semplicemente

$$\Big\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 - e_3 \Big\rangle = \Big\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Big\rangle = 0,$$

cioè $(y-1)-(z+1) = 0$ cioè $y - z = 2$. Per la parametrica, troviamo altri due punti del piano come fatto nell'esercizio precedente: ad esempio abbiamo $P_2 = (0,1,-1)$ e $P_3 = (1,2,0)$. I due vettori $P_2 - P$ e $P_3 - P$ **se linearmente indipendenti** generano il piano; abbiamo

$$P_2 - P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

visto che sono *chiaramente* linearmente indipendenti un'equazione parametrica è

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 \\ 1+\lambda_2 \\ -1+\lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

L'intersezione tra il piano $y - z = 2$ e il piano $x = 0$ è una retta dato che i due normali non sono paralleli. Dato che il primo piano non passa per l'origine, tale retta non passa per l'origine. L'equazione cartesiana è chiaramente

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3. *Scrivete le matrici (incompleta* A *e completa* $(A|b)$*) associate al sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y - 2z = -6 \\ x + 2y = 2, \end{cases}$$

calcolate il determinante di A *ed il rango di* $(A|b)$. *Quante soluzioni ha il sistema?*

Soluzione: La matrice incompleta è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre quella incompleta

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo $\det A$ sviluppando rispetto la prima colonna

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -(-4) - 2 - 2 = 0.$$

Per trovare il rango della matrice completa quindi dobbiamo esaminare i determinanti delle matrici quadrate ottenute eliminando la prima, seconda o terza colonna (non la quarta). Abbiamo, eliminando la seconda in modo da avere molti zeri

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = -4 - 6 + 2 \neq 0;$$

quindi, dato che il rango della completa è tre e quella della incompleta più piccolo di tre, il sistema è incompatibile, cioè non ha soluzioni.

Esercizio 4. *Data la matrice* 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

scrivete l'operatore lineare associato $T(x, y, z) = A(x, y, z)^T$ *(a destra dell'uguale trovate il prodotto righe per colonne) e trovatene gli autovalori con le loro molteplicità algebrica e geometrica. Infine scrivete le equazioni cartesiane e parametriche dei corrispondenti autospazi.*

Soluzione: Calcoliamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2y + 2z \\ 2z \end{pmatrix};$$

quindi

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2y + 2z \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Per trovare gli autovalori ritorniamo alla matrice e calcoliamo

$$\det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2,$$

essendo la matrice diagonale. Quindi gli autovalori sono $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica e geometrica uno e $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica due. Vediamo gli autospazi: per $\lambda = 1$ dovremo trovare una retta e difatti

$$(A - \mathrm{Id}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{se e solo se} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

che è la retta generata da e_1:

$$w = \lambda e_1, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Per $\lambda = 2$ la cosa non è scontata ed abbiamo

$$(A - 2\,\mathrm{Id}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \qquad \text{se e solo se} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

che difatti è una retta (quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore è uno) ed è generata da $(1, 1, 0)$:

$$w = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5. *Rispondete alle seguenti domande,* **giustificando la risposta***:*

- *Può un sistema omogeneo essere impossibile?*
- *Trovate un vettore ortogonale sia a $v_1 = e_1 - e_3$ che a $v_2 = e_2 + e_3$.*
- *Calcolate il prodotto scalare tra v_1 e v_2 della domanda precedente.*

Soluzione:

- No, ha sempre la soluzione nulla.

- Nuovamente mi sono scordato di specificare che non fosse nullo, quindi la risposta furba era $(0,0,0)^T$. Altrimenti calcoliamo il prodotto vettoriale tra v_1 e v_2:

$$v_1 \times v_2 = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = e_1 \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} e_2 & e_3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = e_1 - e_2 + e_3.$$

- $$\langle e_1 - e_3, e_2 + e_3 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -1.$$

Esercizio 6. *Rispondete alle seguenti domande.*

- *Scrivete tre primitive diverse della funzione $f(x) = e^x$.*
- *Data una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ed un punto dell'intervallo $x \in (a,b)$, quale è la definizione e cosa rappresenta graficamente il rapporto incrementale di incremento h?*
- *Enunciate precisamente il teorema di Weierstrass per le funzioni continue, e disegnate una funzione continua sull'intervallo aperto $(-1,1)$ che però non ha né massimo né minimo.*

Soluzione:

- Ad esempio $e^x, e^x + 1, e^x + 2$
- Per le domande teoriche si rimanda agli appunti o a un qualsiasi libro; la funzione potrebbe ad esempio essere una funzione simile alla tangente però "tra -1 ed 1" invece che definita tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, oppure (se volete limitata, ma non era richiesto) la funzione $f(x) = x$ "col pallino vuoto" in $x = \pm 1$.

Esercizio 7. *Si disegni un grafico approssimativo della funzione*

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{1}{3}$$

dopo averne trovato il dominio naturale di definizione, eventuali simmetrie, le intersezioni con gli assi, l'insieme di positività, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia attraverso lo studio della derivata prima, massimi/minimi relativi e relativi punti di max / min. **Facoltativi sono** *gli intervalli di convessità/concavità attraverso lo studio della derivata seconda.*

Soluzione: Per il dominio, abbiamo bisogno che il denominatore non si annulli; quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\,(f) &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm\sqrt{3}\} \\ &= (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty). \end{aligned}$$

Per le simmetrie, calcoliamo $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 - 3} - \frac{1}{3} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{1}{3}$$

che è uguale ad $f(x)$; la funzione è quindi pari ed il grafico simmetrico rispetto l'asse y.

Le intersezioni con gli assi: $f(0) = 0$ e per trovare le controimmagini di zero conviene fare il denominatore comune:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{1}{3} = \frac{3(x^2 - 1) - (x^2 - 3)}{3(x^2 - 3)} = \frac{2x^2}{3(x^2 - 3)}.$$

Quindi $f(x) = 0$ se e solo se $2x^2 = 0$ e quindi l'origine è l'unico punto in cui il grafico di f interseca gli assi cartesiani.

La forma della funzione dopo aver fatto il denominatore comune è la migliore da usare per studiarne la positività: dato che il numeratore è sempre maggiore o uguale a zero,

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x^2 - 3 > 0$$

e quindi la funzione è positiva in $(-\infty, -\sqrt{3})$ e in $(\sqrt{3}, +\infty)$ (notate che l'insieme di positività è simmetrico rispetto l'origine, come deve essere).

Data la simmetria della funzione, basta studiare la metà dei limiti. Iniziamo con quello a più infinito: è equivalente studiare la funzione nella sua "forma originale" o dopo aver fatto il denominatore comune

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{3(x^2 - 3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{3x^2(1 - 3/x^2)} = \frac{2}{3}$$

(oppure:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{1}{3} = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3}\right) - \frac{1}{3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1 - 1/x^2)}{x^2(1 - 3/x^2)} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}).$$

Poi

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{2x^2}{3(x^2 - 3)} = +\infty$$

(dato che $x^2 - 3 \to 0^+$ se $x \to \sqrt{3}^+$ e $2x^3 \to 18 > 0$) ed analogamente

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{2x^2}{3(x^2 - 3)} = -\infty.$$

Grazie alla simmetria, possiamo subito dire che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2}{3}, \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}^-} f(x) = +\infty.$$

Calcoliamo ora, per trovare gli intervalli di monotònia,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{d}{dx}\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} = \frac{2x(x^2 - 3) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 - 3)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 3)^2};$$

nuovamente, dato che il denominatore è sempre (strettamente) positivo nel dominio di definizione, la derivata prima è negativa su $[0, \sqrt{3})$ e $(\sqrt{3}, +\infty)$ e quindi la funzione decrescente su questi intervalli (Attenti! non è decrescente per $x \geq 0$) e crescente su $(-\infty, -\sqrt{3})$ e su $(-\sqrt{3}, 0]$. Quindi l'unico punto di massimo (relativo, non assoluto dato che la funzione ha asintoti verticali) è $x = 0$ mentre non ci sono punti di minimo relativo. Infine, deriviamo ulteriormente

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) &= \frac{d}{dx}\frac{-4x}{(x^2 - 3)^2} \\ &= -4\,\frac{(x^2 - 3)^2 - x \cdot 2(x^2 - 3) \cdot 2x}{(x^2 - 3)^4} \\ &= -4\,\frac{(x^2 - 3) - 4x^2}{(x^2 - 3)^3} = \frac{12(x^2 + 1)}{(x^2 - 3)^3}. \end{aligned}$$

Per studiare il segno della frazione, in questo caso è meglio fare il grafico dei segni. Il numeratore $N = 12(x^2 + 1)$ è però sempre positivo, quindi tutto $\mathbb{R}$ va riportato nel gradifo.

Il denominatore invece è positivo quando l'argomento del cubo è positivo, cioè quando $x^2 - 3 > 0$ e quindi in $(-\infty, -\sqrt{3})$ e in $(\sqrt{3}, +\infty)$. Quindi la derivata seconda è positiva in $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ e la funzione convessa in $(-\infty, -\sqrt{3})$ ed in $(\sqrt{3}, +\infty)$ (nuovamente, attenzione!) e concava in $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Trovate il grafico dedotto da queste informazioni in ultima pagina.

Esercizio 8. *Si calcoli l'integrale*

$$\int_{-1}^{0} \Big[3(x-1)^3 + (1-x)^{1/3} - \frac{2}{x+2}\Big]\, dx.$$

Soluzione: Per sostituzione (o con gli integrali immediati)

$$\int (x-1)^3\, dx = \frac{(x-1)^4}{4} + c;$$

con la sostituzione $t = 1 - x$ da cui $dx = -dt$

$$\int (1-x)^{1/3}\, dx = \Big(-\int t^{1/3}\, dt\Big)_{t=1-x} = \Big(-\frac{3}{4} t^{4/3}\Big)_{t=1-x} + c = -\frac{3}{4}(1-x)^{4/3} + c;$$

$$\int \frac{1}{x+2}\, dx = \log|x+2| + c,$$

da cui

$$\begin{aligned}
&\int \Big[3(x-1)^3 + (1-x)^{1/3} - \frac{2}{x+2}\Big]\, dx \\
&\qquad = 3\int (x-1)^3\, dx + \int (1-x)^{1/3}\, dx - 2\int \frac{1}{x+2}\, dx \\
&\qquad\qquad = \frac{3}{4}(x-1)^4 - \frac{3}{4}(1-x)^{4/3} - 2\log|x+2| + c
\end{aligned}$$

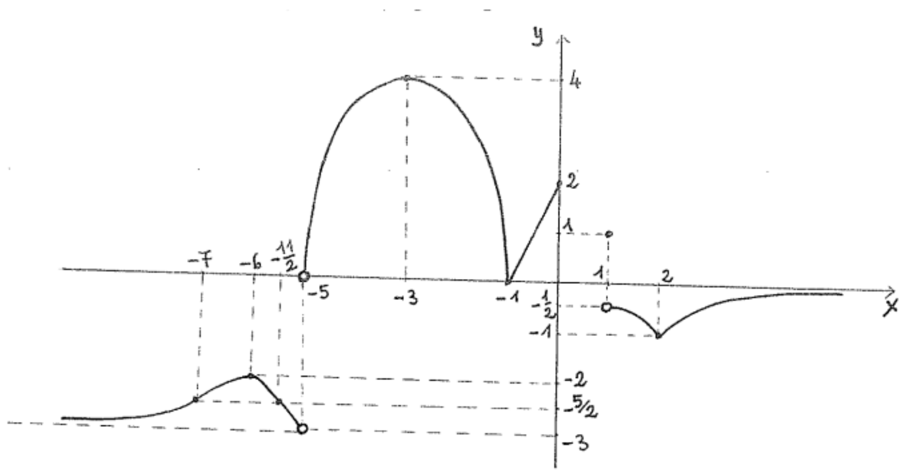
e, dopo qualche calcolo

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{0} \Big[3(x-1)^3 + (1-x)^{1/3} - \frac{2}{x+2}\Big]\, dx \\
&= \Big[\frac{3}{4}\Big((x-1)^4 - (1-x)^{4/3}\Big) - 2\log|x+2|\Big]_{x=-1}^{0} \\
&= \Big[\frac{3}{4}\Big((-1)^4 - (1)^{4/3}\Big) - 2\log|2|\Big] - \Big[\frac{3}{4}\Big((-1-1)^4 - (1+1)^{4/3}\Big) - 2\log|-1+2|\Big] \\
&= \Big[-2\log 2\Big] - \Big[\frac{3}{4}\Big(2^4 - 2^{4/3}\Big)\Big] = -2\log 2 - 3\Big(4 - 2^{-2/3}\Big).
\end{aligned}$$

Esercizio 9. *Della funzione f il cui grafico è riportato sotto, calcolate $f(-1), f(1), f(2)$. Quante controimmagini hanno $y = 2$ e $y = 0$? Individuate due punti di massimo relativo di f. Quanto vale il massimo assoluto della funzione? Calcolate*

$$\lim_{x\to -5^-} f(x), \qquad \lim_{x\to -5^+} f(x), \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

La funzione f è derivabile nel punto $x = 2$?



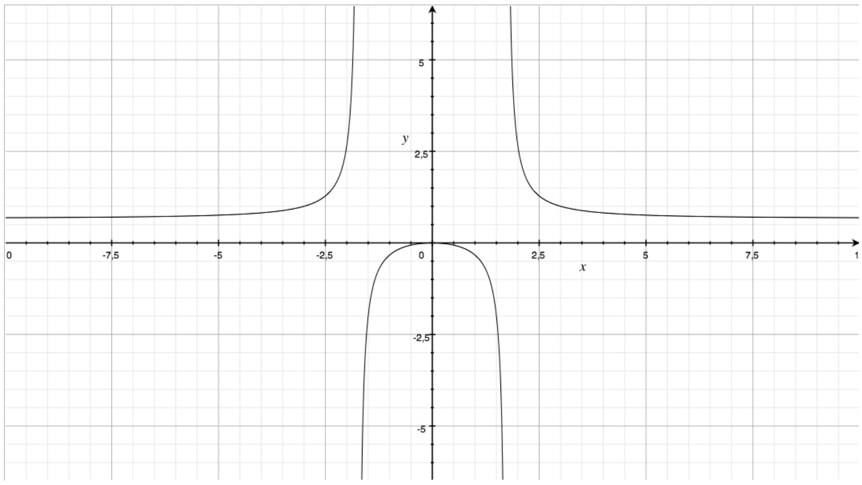
Soluzione:

$$f(-1) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad f(2) = -1.$$

$y = 2$ ha tre controimmagini (una è $x = 0$ e le altre sono le due simmetriche rispetto $x = -3$) mentre $y = 0$ ne ha solo una, $x = -1$ ($x = -5$ ha il pallino vuoto!). Due **punti** di max relativo di f sono $x = -6$ ed $x = -3$. Il massimo assoluto della funzione è 4 ed è assunto nel punto $x = -3$. Poi abbiamo

$$\lim_{x\to -5^-} f(x) = -3, \quad \lim_{x\to -5^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -3^+, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0^-.$$

Infine la funzione non è derivabile nel punto $x = 2$ perchè ivi il grafico ha uno “spigolo”, cioè non esisite il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale: i limiti per $h \to 0^+$ ed $h \to 0^-$ saranno inevitabilmente diversi.


5
2,5
y
0
-7,5
-5
-2,5
0
2,5
5
7,5
1
x
-2,5
-5