CORREZIONE DEL SECONDO APPELLO SCRITTO DEL CORSO DI FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA E GEOMETRIA

CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ

PARMA, 10.02.20

- ARS, 8CFU, **compito intero**: Esercizi **1,2,5,6,8**, durata **2h45'**
- ARS 2019/20, 8CFU, **compitino analisi**: Esercizi **5,6,8,9**, durata **2h**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compitino analisi avendo frequentato il corso a.a. 2019/20**: Esercizi **5,6,7,8 (solo primo integrale),9**, durata **2h30'**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compito intero**: Esercizi **1,2,3,4,5,6,7,8 (solo primo integrale)**, durata **3h**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **analisi**: Esercizi **5,6,7,8**, durata **1h45'**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **geometria**: Esercizi **1,2,3**, durata **1h30'**

Esercizio 1. *Trovate le equazioni cartesiana del piano passante per i punti $P_1 = (2,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$ e $P_3 = (0,0,-1)$ e del piano ad esso parallelo passante per l'origine. Inoltre trovate equazioni (parametrica e cartesiana) della retta r passante per P_1 e P_2.*

Il punto $P = (-2,2,0)$ appartiene a tale retta? Disegnatelo in prospettiva in un riferimento cartesiano. Infine trovate la proiezione del punto P sul piano ortogonale alla retta r passante per l'origine.

Soluzione: per trovare l'equazione cartesiana possiamo passare da quella parametrica:

$$\begin{aligned} w &= P_1 + \lambda_1(P_2 - P_1) + \lambda_2(P_3 - P_1) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-0 \\ -1-0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ y = \lambda_1 \\ z = -\lambda_2 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 2 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 = y \\ \lambda_2 = -z \end{cases}$$

e quindi l'equazione risulta $x + 2y - 2z = 2$. Allo stesso risultato si poteva arrivare, ad esempio, da

$$\det \begin{pmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

che significa che se (x, y, z) sono le coordinate del generico punto del piano, allora il vettore $(x, y, z) - P_1$ deve essere linearmente dipendente con $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$. Altre combinazioni di punti andavano ugualmente bene. Un altro modo ancora consisteva nel trovare la normale al piano come $n = (P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)$ (ed era molto veloce, dato il gran numero di zeri presenti):

$$n = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -e_1 - 2e_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nuovamente, l'equazione cartesiana è data da

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P_1, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

ed è facile verificare che, a meno del segno, viene la stessa equazione che avevamo già ottenuto. Per il piano parallelo e passante per l'origine, non è necessario rifare i calcoli ma basta osservare che ha la stessa normale, e quindi l'equazione cartesiana è $x+2y-2z = 0$. La retta passante per P_1 e P_2 è generata dal vettore $P_2 - P_1$ che abbiamo già calcolato; quindi ha equazione parametrica

$$(1) \qquad w = P_1 + \lambda_1(P_2 - P_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

velocemente si vede che l'equazione cartesiana risulta

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ z = 0. \end{cases}$$

Dato che abbiamo l'equazione cartesiana, è facile verificare che il punto appartiene alla retta: difatti

$$-2 + 2 \cdot 2 = 2$$

e quindi la prima equazione è soddisfatta dalle coordinate del punto. Chiaramente anche la seconda lo è. Nella nostra equazione parametrica in (1) corrisponderebbe al valore di $\lambda = 2$. Dato che appartiene alla retta, quindi, la proiezione sul piano ortogonale alla retta stessa è esattamente l'intersezione con tale piano, che ha equazione $-2x + y = 0$ (si vede dal vettore generatore della retta, che sarà la normale al piano). Le coordinate del punto proiezione saranno quindi le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ z = 0 \\ -2x + y = 0. \end{cases}$$

cioè $(2/5, 4/5, 0)$.

Esercizio 2. *Scrivete la matrice incompleta A associata al sistema*

$$\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ x+2y+3z=0 \\ y+z=0, \end{cases}$$

osservate che ha determinante non nullo e risolvete, usando il metodo di Gauss, il sistema sopra e anche

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ x+2y+3z=1 \\ y+z=0 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} x+3y+2z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ y+z=1. \end{cases}$$

Verificate, infine, che se mettete i tre vettori risultanti, in ordine, come colonne della matrice B, si ha $AB = \mathrm{Id}$ (in altre parole, questo è un metodo per calcolare la matrice inversa usando i sistemi lineari).

Soluzione: La matrice risulta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

verifichiamo che ha determinante nullo. Infatti sviluppando rispetto la terza riga

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (2-3)-(3-2) = -1-1 = -2 \neq 0.$$

Quindi i tre sistemi lineari, che condividono la matrice incompleta, avranno tutti un punto come soluzione, dal teorema di Rouchè-Capelli. Iniziamo risolvendo il primo: prima sostituiamo la seconda riga con $I - II$, poi a sua volta la terza con $II - III$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

il sistema di partenza è quindi equivalente a

$$\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ y-z=1 \\ -2z=1 \end{cases}$$

che ha soluzione $(1/2, 1/2, -1/2)$. Le operazioni da fare per gli altri due sistemi sono esattamente le stesse, l'unica cosa che cambierà è la quarta colonna: difatti le manipolazioni del metodo di Gauss sono dettate solo dalle prime tre (in verità due) colonne, che sono comuni a tutti e tre i sistemi. Quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

che restituisce

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ y - z = -1 \\ -2z = -1 \end{cases}$$

che ha soluzione $(1/2, -1/2, 1/2)$. Infine,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ -2z = -1 \end{cases}$$

che restituisce $(-5/2, 1/2, 1/2)$. Quindi la matrice B è

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e risulta

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) & 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) + 2 \cdot \frac{1}{2} & 1 \cdot (-\frac{5}{2}) + 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \\ 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) & 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 3 \cdot \frac{1}{2} & 1 \cdot (-\frac{5}{2}) + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} \\ 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot (-\frac{1}{2}) & 1 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot \frac{1}{2} & 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 & \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 & -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 1 \\ \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2} & \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} + 1 + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio 3. *Data la matrice* 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

scrivete l'operatore lineare associato $T(x, y, z) = A(x, y, z)^T$ *e trovatene gli autovalori con le loro molteplicità algebrica e geometrica. Infine scrivete le equazioni cartesiane e parametriche dei corrispondenti autospazi.*

Soluzione: Abbiamo (il secondo è il prodotto tra matrici)

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y+z \\ y+2z \end{pmatrix}$$

e

$$A - \lambda \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

da cui, sviluppando rispetto la prima riga

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)\big[(2-\lambda)^2 - 1\big] \\ &= (2-\lambda)\big[\lambda^2 - 4\lambda + 3\big] \\ &= (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3). \end{aligned}$$

Quindi le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda = 1, 2, 3$, tutti autovalori con molteplicità algebrica e geometrica uno. Gli autospazi: per $\lambda = 1$ dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

e l'equazione cartesiana della retta è chiaramente

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0; \end{cases}$$

quella parametrica, dato che un vettore generatore è $(0, 1, -2)$

$$w = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Per per $\lambda = 2$ abbiamo direttamente

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0; \end{cases}$$

che ha equazione parametrica

$$w = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Infine $\lambda = 3$ ha autospazio definito da

$$\begin{cases} -x = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

che ha equazione parametrica

$$w = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4. *Rispondete alle seguenti domande,* **giustificando la risposta***:*

- *Fate un esempio di due vettori in $\mathbb{R}^2$ (diversi tra di loro) tali che il loro sottospazio lineare generato abbia dimensione uno (cioè sia una retta).*
- *I punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $z = x + y^2$ formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$?*
- *Trovate un vettore ortogonale sia a $v_1 = e_1 + e_2 - e_3$ che a $v_2 = -e_1 + e_2 + e_3$.*
- *Una retta passante per l'origine può appartenere ad un piano* **non** *passante per l'origine?*

Soluzione:

- Basta prendere v e $2v$, quale che sia v non nullo.
- No, perchè la relazione che lega le coordinate non è lineare: per esempio i vettori $(0, 1, 1)$ e $(0, -1, 1)$ appartengono ma non appartiene la loro somma dato che
$$2 \neq 0 + 0.$$
- Il vettor nullo va bene, dato che mi sono scordato di specificare che non volevo il vettor nullo. Se vogliamo un vettore non nullo, dobbiamo prendere il prodotto vettore $v_1 \times v_2$:
$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e_1 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - e_2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + e_3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2e_1 + 2e_3. \end{aligned}$$
- No, perchè la retta è un sottoinsieme del piano in questo caso: quindi, se l'origine appartiene alla retta, appartiene anche al piano.

Esercizio 5. *Rispondete alle seguenti domande.*

- *Disegnate il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che abbia un solo massimo relativo ma non abbia massimo assoluto.*
- *Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, cosa significa che f è continua in un punto $x_0 \in (a, b)$?*
- *Quale dei punti dell'insieme $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ appartengono all'insieme $(-1, 0) \cup [0, 1) \cup (1, 2] \cup (3, +\infty)$?*
- *Enunciate precisamente il teorema fondamentale del calcolo integrale, descrivendo graficamente il significato della funzione integrale.*

Soluzione:

- Il grafico di $f(x) = (x^2 - 1)^2$ che è stato tracciato in aula, per esempio.
- I punti $-1, 1, 3$ non appartengono, dato che non appartiene a nessuno dei quattro intervalli di cui l'insieme considerato è unione. Invece 0 appartiene al secondo intervallo e 2 al terzo.

Esercizio 6. *Si disegni un grafico approssimativo della funzione*

$$f(x) = (x + 1)^2(3 - x^2)$$

dopo averne trovato il dominio naturale di definizione, eventuali simmetrie, le intersezioni con gli assi, l'insieme di positività, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia attraverso lo studio della derivata prima, massimi/minimi relativi e relativi punti di $\max / \min$*, gli intervalli di convessità/concavità attraverso lo studio della derivata seconda.* **Facolativo:** *quante soluzioni ha l'equazione $(x + 1)^2(3 - x^2) = -1$?*

Soluzione: La funzione f, come tutti i polinomi, ha come dominio tutto $\mathbb{R}$. Cerchiamo eventuali simmetrie:

$$f(-x) = (-x + 1)^2(3 - (-x)^2) = (x - 1)^2(3 - x^2) \neq f(x)$$

e quindi non ci sono particolari simmetrie. Se poniamo $x = 0$, abbiamo $f(0) = 3$ e quindi l'intersezione con l'asse y è in $(0, 3)$. Invece la legge di annullamento del prodotto ci dice che se

$$(x + 1)^2(3 - x^2) = 0$$

o $(x + 1)^2 = 0$ (e quindi $x = -1$) oppure $3 - x^2 = 0$ da cui $x = \pm\sqrt{3}$. Le intersezioni sono quindi tre, con l'asse delle x: $(-\sqrt{3}, 0)$, $(-1, 0)$ e $(\sqrt{3}, 0)$. Studiamo prima i limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} (x + 1)^2(3 - x^2) = -\infty$$

dato che il primo fattore tende a $+\infty$ e il secondo a $-\infty$; lo stesso per il secondo limite

$$\lim_{x \to -\infty} (x + 1)^2(3 - x^2) = \text{“} + \infty \times (-\infty)'' = -\infty.$$

Studiamo la positività, facile dato che il polinomio è già fattorizzato, cioè scritto come prodotto di fattori che sono polinomi di ordine basso: il primo fattore $(x + 1)^2$ è sempre positivo, e il secondo $3 - x^2 \geq 0$ sse $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{x}$. Quindi $f(x) \geq 0$ se $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{x}$.

Calcoliamo la derivata prima:

$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{d}{dx}(x+1)^2(3-x^2) &= (3-x^2)\frac{d}{dx}(x+1)^2 + (x+1)^2\frac{d}{dx}(3-x^2) \\
&= (3-x^2)\cdot 2(x+1) + (x+1)^2\cdot(-2x) \\
&= 2(x+1)\big[(3-x^2) - x(x+1)\big] \\
&= -2(x+1)\big[2x^2+x-3\big].
\end{aligned}$$

Quindi

$$f'(x) \geq 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad (x+1)\big[2x^2+x-3\big] \leq 0;$$

il primo fattore è positivo quando $x \geq -1$, mentre per il secondo troviamo le radici dell'equazione associata: $2x^2+x-3=0$ sse

$$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{5}{4}.$$

Quindi il secondo fattore è positivo per valori esterni: $x \leq -3/2$ oppure $x \geq 1$. Mettendo queste informazioni nel grafico dei segni abbiamo

$$f'(x) \geq 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x \leq -3/2 \text{ o } -1 \leq x \leq 1.$$

Segue che $x = -3/2$ e $x = 1$ sono due punti di massimo relativo e $x = -1$ d minimo relativo. I corrispondenti valori di f sono rispettivamente $f(-3/2) = 3/16$, $f(1) = 8$ e zero. Infine calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -2\frac{d}{dx}(x+1)\big[2x^2+x-3\big] \\
&= -2\Big[2x^2+x-3+(x+1)\frac{d}{dx}(2x^2+x-3)\Big] \\
&= -2\Big[2x^2+x-3+(x+1)(4x+1)\Big] \\
&= -2\big[6x^2+6x-2\big] = -4\big[3x^2+3x-1\big];
\end{aligned}$$

quindi dato che

$$3x^2+3x-1=0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x = \frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$$

$f''(x) \geq 0$ se e solo se $x \leq (-3-\sqrt{21})/6 \approx -1,2$ o $x \geq (-3+\sqrt{21})/6 \approx 0,2$. Quindi possiamo disegnare il grafico di f che trovate in ultima pagina.

Dal grafico e dal fatto che il minimo locale è maggiore o uguale a zero, segue che l'equazione $(x+1)^2(3-x^2) = -1$ ha due radici (una negativa, minore di $-\sqrt{3}$ dove la funzione si annulla, e una positiva maggiore di $\sqrt{3}$).

Esercizio 7. *Si calcolino i seguenti limiti:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(x^2)}-1}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\sqrt{x}}{2e^x+x\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+\sqrt{x^2+1}}{2e^x+\sqrt{x^2+1}}.$$

Soluzione: Per il primo usiamo il limite notevole dell'esponenziale: sostituendo, se vogliamo, $t = \sin(x^2)$ (se$x \to 0$ allora $t \to 0$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(x^2)}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(x^2)}-1}{\sin(x^2)}\cdot\frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x} = 0$$

dato che il primo limite fa uno e il secondo zero (vedete la correzione del precedente scritto). Per il secondo, la gerarchia degli infiniti ci dice che $e^x \gg x\sqrt{x} \gg \sqrt{x}$, quindi, raccogliendo,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+\sqrt{x}}{2e^x+x\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x}\frac{1+\frac{\sqrt{x}}{e^x}}{2+\frac{x\sqrt{x}}{e^x}} = \frac{1}{2}.$$

Infine, dato che $e^x \to 0$ quando $x \to -\infty$, raccogliendo x^2 sotto radice abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+\sqrt{x^2+1}}{2e^x+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+|x|\sqrt{1+1/x^2}}{2e^x+|x|\sqrt{1+1/x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x}{|x|}+\sqrt{1+1/x^2}}{2\frac{e^x}{|x|}+\sqrt{1+1/x^2}} = 1.$$

dato che $e^x/|x| \to 0$ se $x \to -\infty$.

Esercizio 8. *Si calcolino gli integrali*

$$\int_0^1 \left[2(x-1)^4 - (1-x)^{2/5}\right] dx, \qquad \int \left[x^6+1+\frac{1}{x^3+1}+e^{x^3}\right]x^2\, dx.$$

Soluzione: Per trovare la primitiva della funzione integranda nel primo integrale, sostituiamo $y = x-1$ da cui $dy = dx$ e

$$\begin{aligned}\int \left[2(x-1)^4 - (1-x)^{2/5}\right] dx &= 2\left(\int y^4\, dy\right)_{y=x-1} - \left(\int (-y)^{2/5}\, dy\right)_{y=x-1} \\ &= 2\left[\frac{y^5}{5}\right]_{y=x-1} - \left[-\frac{(-y)^{1+2/5}}{1+2/5}\right]_{y=x-1} + c \\ &= 2\frac{(x-1)^5}{5} + \frac{5}{7}(1-x)^{7/5} + c\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[2(x-1)^4 - (1-x)^{2/5}\right] dx &= \left[2\frac{(x-1)^5}{5} + \frac{5}{7}(1-x)^{7/5}\right]_{x=0}^1 \\ &= -2\frac{(-1)^5}{5} + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} - \frac{2}{5} = \frac{11}{35}.\end{aligned}$$

Per il secondo osserviamo che x^2 è “simile” alla derivata di x^3, che compare ampiamente tra le parentesi quadre. Quindi con la sostituzione $y = x^3$ abbiamo

$$\begin{aligned}\int \left[x^6+1+\frac{1}{x^3+1}+e^{x^3}\right]x^2\, dx &= \frac{1}{3}\int \left[(x^3)^2+1+\frac{1}{x^3+1}+e^{x^3}\right]3x^2\, dx \\ &= \frac{1}{3}\int \left[y^2+1+\frac{1}{y+1}+e^y\right] dy \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{y^3}{3}+y+\ln|y+1|+e^y\right)_{y=x^3} + c \\ &= \frac{x^9}{9}+\frac{x^3}{3}+\frac{\ln|x^3+1|}{3}+\frac{e^{x^3}}{3}+c.\end{aligned}$$

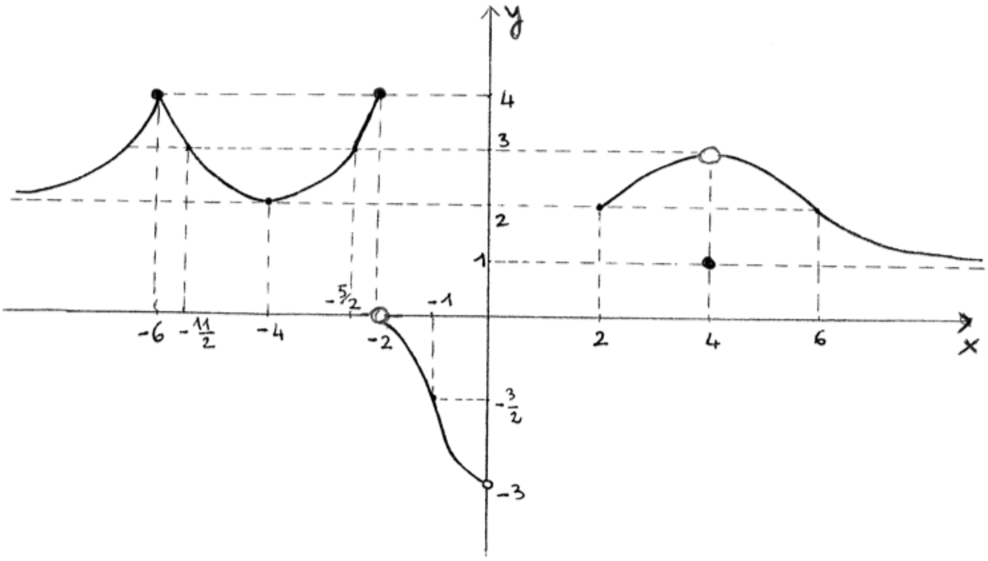
Esercizio 9. *Della funzione*

$$f : (-\infty, 0) \cup [2, +\infty) \to \mathbb{R}$$

il cui grafico è riportato qui sotto, calcolate $f(-2), f(2), f(4)$. Quante controimmagini ha $y = 3$? $x = -6$ è punto di massimo relativo? E $x = -2$? Quanto vale il massimo assoluto della funzione? Scrivete gli elementi dell'insieme $f^{-1}(2)$ e calcolate

$$\lim_{x\to-2^-} f(x), \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x), \qquad \lim_{x\to4} f(x), \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

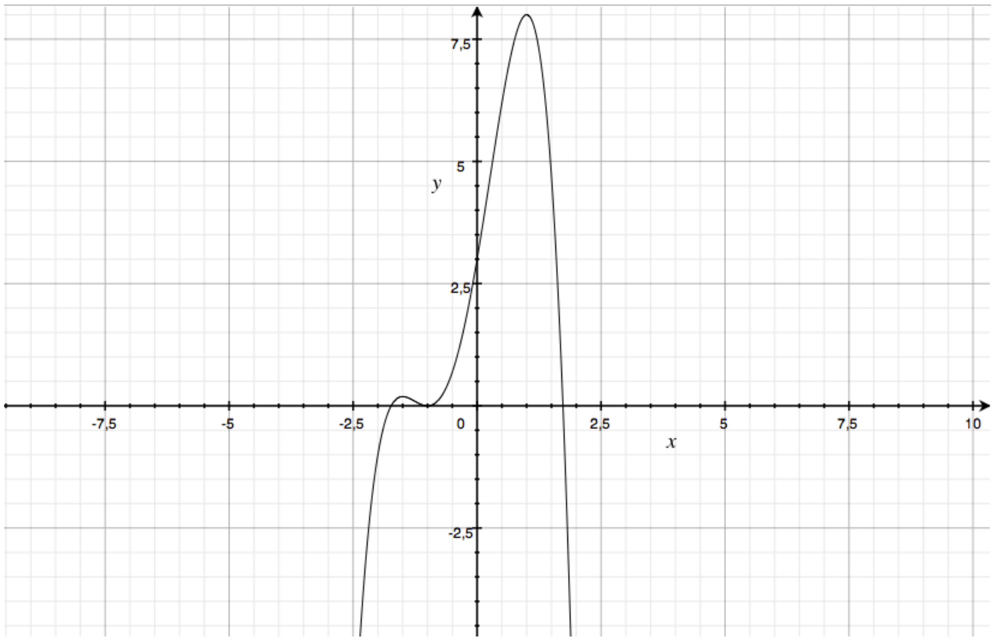
La funzione f è continua nel punto $x = 4$?



Soluzione: $f(-2) = 4, f(2) = 2, f(4) = 1$. Il valore $y = 3$ ha tre controimmagini, tutte minori di -2 (due sono calcolabili precisamente e sono $-5/2$ e $-11/2$). $x = -6$ è unto di massimo relativo (e assoluto, e tale massimo assoluto vale 4), dato che tutti i valori della funzione in un intorno di $x = -6$ sono minori, dato che il grafico sta "sotto". Anche $x = -2$, per la stessa ragione: in particolare i valori per x vicino a $x = -2$ ma maggiore di -2 sono negativi. $f^{-1}(2) = \{6, 2, -4\}$. Abbiamo

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = 4, \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to4} f(x) = 3,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

ed infine la funzione **non** è continua in $x = 4$ poichè il limite è diverso dal valore della funzione.


7,5
5
y
2,5
-7,5
-5
-2,5
0
2,5
5
7,5
10
x
-2,5