CORREZIONE DEL COMPITINO DI GEOMETRIA DEL CORSO DI FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA E GEOMETRIA - SECONDA PARTE

CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ

PARMA, 25.11.19

Esercizio 1. *Verificate che i due vettori*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

siano **linearmente indipendenti.** *Trovate un'equazione cartesiana del piano dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine e generato da v_1 e v_2. Scrivete poi equazioni, parametrica e cartesiana, della retta ortogonale a tale piano, passante per il punto $P = (2, 0, 1)$ e trovate le coordinate del punto di intersezione tra tali retta e piano.*

Soluzione: per la lineare indipendenza, o si osserva che il rango della matrice in cui i due vettori sono le colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

è massimo (infatti il minore 2×2 ottenuto cancellando l'ultima riga è e quindi diverso da zero), oppure che l'equazione in λ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

non è mai soddisfatta (infatti uguagliando le prime componenti risulterebbe un'equazione impossibile). Per l'equazione cartesiana, o passiamo dall'equazione parametrica

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ -2\lambda_1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

(ricordate che il piano passa per l'origine $(0, 0, 0)$) e quindi dalla prima e terza equazione abbiamo $z = -2x$ (cioè $2x + z = 0$), oppure calcoliamo il normale come prodotto vettoriale

$$v_1 \times v_2 = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} e_1 & e_3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2e_1 + e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sviluppando chiaramente rispetto la terza riga, e l'equazione cartesiana viene esattamente la stessa.

Il vettore che genererà la retta sarà quindi quest'ultimo, e un'equazione parametrica potrà essere

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Notate che tale retta passa per l'origine (difatti $(0,0,0)$ corrisponde al valore $\lambda = -1$). L'equazione cartesiana si ottiene eliminando λ da

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \tag{1}$$

e quindi

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = 0. \end{cases}$$

Per l'intersezione, o mettiamo a sistema le due (tre) equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - 2z = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$

che si risolve semplicemente per sostituzione (o per riduzione) nelle variabili x e z: il punto di intersezione avrà coordinate $(0,0,0)$, quindi è l'origine stessa. Altrimenti si impone nell'equazione parametrica della retta che il punto appartenga al piano di equazione $2x + z = 0$, cioè che le sue coordinate - vedete (1) - soddisfino l'equazione cartesiana del piano:

$$2(2 + 2\lambda) + 1 + \lambda = 0$$

cioè $5(1 + \lambda) = 0$, $\lambda = -1$, che abbiamo già visto corrispondere all'origine.

Esercizio 2. *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolate AB e $\det(AB)$. La matrice AB è invertibile?

Soluzione: per calcolare il prodotto AB, usiamo il prodotto righe per colonne. In particolare,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suo determinante vale, sviluppando rispetto la prima riga,

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix} &= -\det\begin{pmatrix}3 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix}3 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}\\ &= -(3-(-3)) + 2(-3-(-6))\\ &= -6 + 2\cdot 3 = 0.\end{aligned}$$

Dato che il determinante è zero, la matrice AB **NON** è invertibile.

Esercizio 3. *Qual è la mutua posizione del piano* $3x + 3y + z = 1/2$ *e della retta di equazione parametrica*

$$w = \begin{pmatrix}0\\ 1/3\\ -1/2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -3\end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

in $\mathbb{R}^3$*? E dello stesso piano con la retta di equazione cartesiana*

$$\begin{cases} y = 0\\ 3x + z = 1?\end{cases}$$

Soluzione: per la prima è conveniente controllare il prodotto scalare tra la normale al piano e il vettore generatore della retta:

$$\left\langle \begin{pmatrix}3\\ 3\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -3\end{pmatrix} \right\rangle = 3\cdot 1 + 3\cdot 0 + 1\cdot(-3) = 0$$

quindi sono ortogonali e la retta o appartiene al piano, oppure ne è disgiunta. Controlliamo con il punto $(0, 1/3, -1/2)$ che sicuramente appartiene alla retta:

$$3\cdot 0 + 3\cdot(1/3) + (-1/2) = 1 - 1/2 = 1/2;$$

quindi tale punto appartiene al piano e di conseguenza tutti i punti della retta; la retta è quindi un sottoinsieme del piano.

Per la seconda parte dell'esercizio, usiamo Rouché-Capelli dopo aver messo a sistema le equazioni cartesiane: la matrice ridotta del sistema

$$\begin{cases} 3x + 3y + z = 1/2\\ y = 0\\ 3x + z = 1\end{cases}$$

è

$$A = \begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

che ha determinante (calcolato rispetto la seconda riga)

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix} = 0,$$

dato che la matrice 2×2 ha due righe uguali. Il rango di A è quindi due, dato che la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo. Invece la matrice completa ha rango tre:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha minore

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con determinante

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è impossibile, e ciò significa che piano e retta sono disgiunti.

Esercizio 4. *Dato l'operatore lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che*

$$T(e_1) = 2e_2, \qquad T(e_2) = 3e_2 + 2e_3, \qquad T(e_3) = 2e_2 + 3e_3$$

trovarne gli autovalori con molteplicità algebrica e geometrica e trovare inoltre le equazioni cartesiane degli autospazi associati.

Soluzione: dal testo dell'esercizio si vede immediatamente che la matrice associata all'operatore lineare T è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

quindi

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} &= -\lambda \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda[(3-\lambda)^2 - 4] \\ &= -\lambda(1-\lambda)(5-\lambda). \end{aligned}$$

Gli autovalori sono quindi $\lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = 5$ tutti con molteplicità algebrica e quindi geometrica uno.

L'autospazio relativo a $\lambda = 0$ è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

che è già in forma ridotta.

L'autospazio relativo a $\lambda = 1$ è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$(A - \mathrm{Id}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Infine l'autospazio relativo a $\lambda = 5$ è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$(A - 5\mathrm{Id}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -5x = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$