CORREZIONE DEL COMPITINO DI GEOMETRIA DEL CORSO DI FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA E GEOMETRIA - PRIMA PARTE

CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ

PARMA, 25.11.19

Domanda 1. *Calcolate (in coordinate) $2v_1 - v_2$ per*

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Risposta:

$$2v_1 - v_2 = 2\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ 0 - 1 \\ -2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Domanda 2. *I due vettori v_1 e v_2 dell'esercizio precedente sono ortogonali?*

Risposta: No perchè il loro prodotto scalare non è zero:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -2 - 2 = -4.$$

Domanda 3. *Nel* **piano** *cartesiano qual è l'intersezione tra la retta di equazione $2x+3y = 2$ e l'asse delle x?*

Risposta: Basta mettere a sistema l'equazione della retta con l'equazione dell'asse delle x, che è $y = 0$:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ y = 0; \end{cases}$$

risolvendo per sostituzione viene $2x = 2$ cioè $x = 1$ ed $y = 0$. Quindi il punto d'intersezione è $(1, 0)$.

Domanda 4. *Disegnate approssimativamente in un piano cartesiano i vettori di $\mathbb{R}^2$*

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad -2v, \qquad v + w.$$

Risposta:

Domanda 5. *Cosa è in $\mathbb{R}^3$ l'insieme dei vettori ortogonali al vettore e_1?*

Risposta: È il piano con normale $e_1 = (1,0,0)^T$, che ha equazione $x = 0$.

Domanda 6. *Il punto $P = (1,-2,1)$ appartiene alla retta di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=-1? \end{cases}$$

Risposta: No perchè se appartenesse le sue coordinate dovrebbero soddisfare il sistema, cioè soddisfare entrambe le equazioni, ma $x = 1, y = -2$ e $z = 1$ è una soluzione di $x+y+z=0$ ma NON di $x-y=-1$.

Domanda 7. *A quale valore del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ corrisponde punto $(2,-2,2)$ nella retta di equazione parametrica*

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}?$$

Risposta:

Dobbiamo trovare λ tale che

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{se e solo se} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi si vede facilmente che $\lambda = 3$.

Domanda 8. *Se A è la matrice 3×3*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e I è la matrice identica 3×3, quanto vale l'espressione $\mathrm{I}A - A\mathrm{I}$?

Risposta: Dato che I è la matrice identica, si ha $\mathrm{I}A = A\mathrm{I} = A$; quindi $\mathrm{I}A - A\mathrm{I} = A - A = \underline{0}$, dove $\underline{0}$ è la matrice nulla i cui elementi sono tutti zero.

Domanda 9. *Quanto vale il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}?$$

Risposta: Dato che la matrice ha due righe proporzionali (cioè linearmente dipendenti), la prima e la terza, il suo determinante è zero.

Domanda 10. *Qual è il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Risposta: Dato che la matrice ha due colonne di zeri, ogni minore 3×3 estratto avrà una colonna di zeri e quindi determinante nullo. Quindi il rango non è tre. Visto invece che la matrice 2×2 in alto a sinistra ha determinante $-1-2 = -3 \neq 0$, il rango è due.