

**QUARTO APPELLO SCRITTO DEL CORSO DI  
FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA E GEOMETRIA  
CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ  
PARMA, 29.06.20**

---

**IMPORTANTE: leggete CON ATTENZIONE queste righe prima di iniziare.**

Sono permesse calcolatrici ma **non** l'uso dei telefoni cellulari e degli appunti. **Scrivete sul primo foglio di bella** quale dei quattro compiti affrontate. **Scrivete chiaramente** quali sono i fogli di bella e quali quelli di brutta. Le risposte vanno **giustificate**. La durata dell'esame, che dipende dallo scritto che affronterete, è indicata qui sotto.

- 
- ARS, 8CFU: Esercizi **1,2,3,6,7,9**, durata **2h**
  - Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compito intero**: Esercizi **1,2,4,5,7,8,9**, durata **2h30'**
  - Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **analisi**: Esercizi **6,7,8,9**, durata **1h45'**
  - Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **geometria**: Esercizi **1,2,4,5**, durata **1h**
- 

**Esercizio 1.** *I tre punti di  $\mathbb{R}^3$*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

*sono allineati? Se sì, trovare equazioni parametrica e cartesiana della **retta** a cui appartengono. Se no, trovare equazioni parametrica e cartesiana del **piano** a cui appartengono. In entrambi i casi, dire se l'ente geometrico (retta o piano) passa per l'origine.*

**Esercizio 2.** *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = B^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*calcolate **quando possibile**  $AB$ ,  $BA$ ,  $AC$ ,  $CA$  e i determinanti ed i ranghi di queste matrici.*

**Esercizio 3.** *Scrivete le matrici (incompleta  $A$  e completa  $(A|b)$ ) associate al sistema*

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

*e calcolate il determinante di  $A$ . È possibile che il sistema abbia come soluzione il solo vettore nullo?*

**Esercizio 4.** *Dato l'operatore lineare  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$*

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

*scrivete la matrice  $3 \times 3$  associata e trovate gli autovalori con le loro molteplicità algebrica e geometrica. Scrivete le equazioni cartesiane e parametriche dei corrispondenti autospazi e per ogni autospazio scrivete **un autovettore** non nullo esplicitamente.*

**Esercizio 5.** Rispondete alle seguenti domande, giustificando la risposta:

- Se  $A$  è una matrice (reale)  $3 \times 3$  con  $\det A \neq 0$ , quanti sono i vettori  $v$  di  $\mathbb{R}^3$  tali che  $Av = e_1$ ?
- Siano  $v_1, v_2$  due vettori in  $\mathbb{R}^3$ . Quanto vale il prodotto scalare tra  $v_1 \times v_2$  (questo è il prodotto vettoriale) e  $v_1 + v_2$ ?
- Sia  $w$  un vettore non nullo. Scrivete l'espressione della proiezione di un vettore  $v$  su  $w$ .
- Quanto vale l'angolo tra i vettori  $e_2$  ed  $e_3$  **in radianti**?

**Esercizio 6.** Rispondete alle seguenti domande.

- Scrivete la derivata **seconda** della funzione  $f(x) = e^{\sin x + \cos x}$ .
- Scrivete il teorema di Lagrange. In quale caso particolare tale teorema si riduce a quello di Rolle?

**Esercizio 7.** Disegnate un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = x + \frac{2}{x - \sqrt{2}}$$

dopo averne trovato il dominio naturale di definizione, eventuali simmetrie, le intersezioni con gli assi, l'insieme di positività, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia attraverso lo studio della derivata prima, massimi/minimi relativi e relativi punti di max / min, gli intervalli di convessità/concavità attraverso lo studio della derivata seconda (suggerimento: ricordate che se  $f(x) = g(x) + h(x)$ , allora  $f''(x) = g''(x) + h''(x)$ ) (solo ARS 2018/19 e 2019/20 la convessità).

**Esercizio 8.** Calcolate

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\log x} - \frac{x^2}{[\log x]^2}.$$

**Esercizio 9.** Calcolate l'integrale

$$\int_0^\pi [\cos x + \sin x \cos x + [\sin x]^2 \cos x] dx.$$