

**PRIMO APPELLO SCRITTO DEL CORSO DI
FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA E GEOMETRIA
CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ
PARMA, 27.01.20**

IMPORTANTE: leggete CON ATTENZIONE queste righe prima di iniziare.

Sono permesse calcolatrici ma **non** l'uso dei telefoni cellulari e degli appunti. Indicate **nome e cognome** su tutti i fogli (protocollo inclusi). **Fate una crocetta** per indicare quale dei sei compiti affrontate. **Scrivete chiaramente** quale è il foglio di bella e quale quello di brutta. Le risposte vanno **giustificate**. La durata dell'esame, che dipende dallo scritto che affronterete, è indicata qui sotto.

-
- ARS, 8CFU, **compito intero**: Esercizi **1,2,3,6,7,9**, durata **2h45'**
 - ARS 2019/20, 8CFU, **compitino analisi**: Esercizi **6,7,9,10**, durata **2h**
 - Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compitino analisi avendo frequentato il corso a.a. 2019/20**: Esercizi **6,7,8,9 (solo parte della primitiva),10**, durata **2h15'**
 - Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compito intero**: Esercizi **1,2,4,5,6,7,8,9**, durata **3h**
 - Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **analisi**: Esercizi **6,7,8,9**, durata **1h45'**
 - Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **geometria**: Esercizi **1,2,4,5**, durata **1h30'**
-

Esercizio 1. Trovate l'equazione cartesiana del piano passante per i punti $P_1 = (1, 1, 0)$ e $P_2 = (-2, \sqrt{2}, 1)$ ed ortogonale alla retta r di equazione parametrica

$$r : w = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Trovate inoltre l'equazione cartesiana di r e la sua intersezione col piano coordinato xy .

Esercizio 2. Date le matrici $A = (1 \ 0 \ 2)^T \in M^{3 \times 1}$ e $B = (-1 \ -1 \ -\frac{1}{2}) \in M^{1 \times 3}$, calcolate $AB \in M^{3 \times 3}$, $\det(AB)$ e $\text{rg}(AB)$.

Esercizio 3. Trovate, usando il metodo che preferite, tutte le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ 3x + y + 2z = 4 \\ -3x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Nel caso siano una retta o un piano, sono richieste sia l'equazione cartesiana che quella parametrica.

Facoltativo: Sapete trovare le soluzioni del sistema omogeneo (cioè quello con tre zeri a destra) associato?

Esercizio 4. Considerate l'operatore lineare $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 4z \\ -y \\ 3x + 2z \end{pmatrix};$$

scrivete la matrice associata e trovatene gli autovalori con le loro molteplicità algebrica e geometrica. Infine scrivete le equazioni cartesiane e parametriche dei corrispondenti autospazi.

Esercizio 5. Rispondete alle seguenti domande, giustificando la risposta:

- Fate un esempio di quattro vettori in \mathbb{R}^3 (tutti diversi tra di loro) tali che il loro sottospazio lineare generato abbia dimensione due.
- I punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $y = x + 2$ formano un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 ?
- Calcolate il prodotto scalare tra $e_1 + e_2 - e_3$ ed $-e_1 + e_2 + e_3$.
- Un piano passante per l'origine può contenere rette **non** passanti per l'origine?

Esercizio 6. Rispondete alle seguenti domande.

- Disegnate il grafico di una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che abbia un massimo assoluto in $x = 0$.
- Data la funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, cosa significa che G è una primitiva di f ? Oltre a G , sapete trovarne un'altra, diversa da G ?
- Scrivete l'intervallo aperto e quello chiuso aventi come estremi 1 e 3.
- Enunciate precisamente il teorema di Rolle e descrivetene brevemente il significato geometrico (in termini del grafico della funzione).

Esercizio 7. Si disegni un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 - 1}$$

dopo averne trovato il dominio naturale di definizione, eventuali simmetrie, le intersezioni con gli assi, l'insieme di positività, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia attraverso lo studio della derivata prima, gli intervalli di convessità/concavità attraverso lo studio della derivata seconda. Indicate esplicitamente eventuali asintoti orizzontali e/o verticali.

Esercizio 8. Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x^2} - 1}{\log(1+x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2} - 1}{\log(1+x)}.$$

Esercizio 9. Si calcoli l'integrale

$$\int_{-2}^{-1/2} \frac{1}{x} dx + \int_{1/2}^2 \left[2x^{2/3} + \frac{3}{x^3} \right] dx$$

e si trovi la primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ che vale 2 quando $x = 0$.

Esercizio 10. Della funzione f il cui grafico è riportato sotto, calcolate $f(-4)$, $f(-3)$, $f(1)$. Quante controimmagini ha $y = 1$? $x = -1/2$ è punto di massimo relativo? Assoluto? Quanto vale il minimo assoluto di f ? Scrivete gli elementi dell'insieme $f^{-1}(0)$ e calcolate

$$\lim_{x \rightarrow -6^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -6^-} f(x).$$

Esiste $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$? La funzione f è derivabile nel punto $x = -4$?