# SESTO APPELLO SCRITTO DEL CORSO DI FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA E GEOMETRIA

## CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ

## PARMA, 25.08.20

---

**IMPORTANTE: leggete CON ATTENZIONE queste righe prima di iniziare.**

Sono permesse calcolatrici ma **non** l'uso dei telefoni cellulari e degli appunti. **Scrivete sul primo foglio di bella** quale dei quattro compiti affrontate. **Scrivete chiaramente** quali sono i fogli di bella e quali quelli di brutta. Le risposte vanno **giustificate**. La durata dell'esame, che dipende dallo scritto che affronterete, è indicata qui sotto.

---

- ARS, 8CFU: Esercizi **1,2,5,6,9 (solo #1 e #2)**, durata **2h30'**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compito intero**: Esercizi **2,3,4,5,6,8,9**, durata **3h**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **analisi**: Esercizi **5,6,7,8,9 (solo #2 e #3)**, durata **2h**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **geometria**: Esercizi **1,2,3,4**, durata **1h30'**

---

**Esercizio 1.** *Trovare un'equazione parametrica della retta di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana*

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

*e trovare equazioni cartesiana e parametrica del piano $\pi$ passante per $P = (-2, 1, 0)$ ed ortogonale a tale retta. Quale è la proiezione di tale retta sul piano $\pi$?*

**Esercizio 2.** *Calcolate il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

*poi risolvete i tre sistemi*

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 1 \\ x + 4y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y + 3z = 0 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y + 3z = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

*(osservate che hanno tutti $A$ come matrice incompleta). Infine scrivete la matrice $B$, che ha come colonne i tre vettori soluzione dei tre sistemi (prima colonna=soluzione del primo sistema, ecc) e verificate che si ha $AB = \mathrm{Id}$.*

**Esercizio 3.** *Data la matrice $3 \times 3$*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{scrivete esplicitamente l'operatore} \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

*e calcolate $T(e_1 - e_3)$. Trovate gli autovalori con le loro molteplicità algebrica e geometrica. Scrivete equazioni cartesiane e parametriche per i corrispondenti autospazi. Il vettore $(1,0,0)^T$ è un autovettore di $T$?*

**Esercizio 4.** *Rispondete alle seguenti domande,* **giustificando la risposta***:*

- *È vero o falso che per tre punti non allineati passa un solo piano?*
- *Scrivete le equazioni cartesiane di due piani paralleli, uno passante per l'origine, uno passante per $(1,1,1)$.*
- *Quale è la lunghezza del vettore $e_1 + (1, \sqrt{2}, -\sqrt{3})^T$?*
- *Esiste un vettore ortogonale, in $\mathbb{R}^3$, sia ad $e_1$ che ad $e_2$ che ad $e_3$?*

**Esercizio 5.** *Rispondete alle seguenti domande.*

- *Fate un esempio (anche solamente grafico) di una funzione $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ per cui cosa significa che $x_0 = 1$ sia un punto di massimo relativo* ma non assoluto *per $f$.*
- *L'intersezione degli intervalli $(1,3]$ e $[3,+\infty)$ è ... e la loro unione è ...; l'intersezione degli intervalli $[1,3)$ e $[3,+\infty)$ è ... e la loro unione è ...*
- *Scrivete la definizione della (o meglio, di una)* **funzione integrale** *di $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (quella che compare nel Teorema fondamentale del calcolo integrale) ed enunciate il Teorema di Torricelli, spiegate cioè che relazione c'è tra integrale definito di $f$ ed una* **qualsiasi** *sua primitiva.*

**Esercizio 6.** *Disegnate un grafico approssimativo della funzione*

$$f(x) = \frac{x(x^2+1)-1}{x-1}$$

*dopo averne trovato il dominio naturale di definizione, eventuali simmetrie, le intersezioni con gli assi, l'insieme di positività (suggerimento: il numeratore è positivo sulla semiretta $[x_0, +\infty)$ con $x_0 \approx 0,7$), i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia attraverso lo studio della derivata prima, massimi/minimi relativi e relativi punti di $\max / \min$, gli intervalli di convessità/concavità attraverso lo studio della derivata seconda. Il punto $(0,1)$ appartiene al grafico di $f$? Perché? Quale è l'equazione della retta tangente al grafico in tale punto?*

**Esercizio 7.** *Calcolate*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x^3 + 1}{x^3 + x^3 \ln|x|}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + x^3 + 1}{x^3 + x^3 \ln|x|}.$$

**Esercizio 8.** *Per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{2\ln(1+x^2)} + 2 & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

*è continua su $\mathbb{R}$? Per tale valore, essa risulta anche derivabile in $x_0 = 0$ (usate la definizione di derivata)? (Oss: se usate de l'Hopital dovete spiegare perché!)*

**Esercizio 9.** *Calcolate gli integrali*

$$\int_1^e \left[\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right] dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx, \qquad \int x(x+1)e^{x^2}\, dx.$$

*(suggerimento per il terzo: spezzate ed integrate per parti scegliendo opportunamente $g'$)*