

**QUINTO APPELLO SCRITTO DEL CORSO DI
FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA E GEOMETRIA
CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ
PARMA, 20.07.20**

IMPORTANTE: leggete CON ATTENZIONE queste righe prima di iniziare.

Sono permesse calcolatrici ma **non** l'uso dei telefoni cellulari e degli appunti. **Scrivete sul primo foglio di bella** quale dei quattro compiti affrontate. **Scrivete chiaramente** quali sono i fogli di bella e quali quelli di brutta. Le risposte vanno **giustificate**. La durata dell'esame, che dipende dallo scritto che affronterete, è indicata qui sotto.

-
- ARS, 8CFU: Esercizi **1,2,3,6,7,9 (solo #1)**, durata **2h**
 - Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compito intero**: Esercizi **1,3,4,5,6,7,9**, durata **2h30'**
 - Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **analisi**: Esercizi **6,7,8,9**, durata **1h45'**
 - Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **geometria**: Esercizi **1,3,4,5**, durata **1h15'**
-

Esercizio 1. *I quattro punti di \mathbb{R}^3*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

*sono complanari, cioè esiste un piano a cui appartengono tutti e quattro? Se sì, trovare equazioni parametrica e cartesiana del **piano** a cui appartengono. Se no, trovare equazioni parametriche e cartesiane delle **due rette** a cui appartengono, rispettivamente P_1, P_2 e P_3, P_4 .*

Esercizio 2. *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

scrivete A^T (la trasposta di A) e calcolate A^2 , AA^T , $\det(A)$, $\text{rank}(A)$, $\det(A^2)$ e $\det(A^3)$ (dove ovviamente $A^2 = AA$ e $A^3 = AAA$ cioè A moltiplicata per se stessa un numero opportuno di volte).

Esercizio 3. *Trovate l'insieme delle soluzioni dei due sistemi*

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ -4x - 6y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

e l'insieme dei punti che li risolvono entrambi.

Esercizio 4. *Data la matrice 3×3*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{scrivete esplicitamente l'operatore } T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e calcolate $T(2e_1 + 3e_3)$. Trovate gli autovalori con le loro molteplicità algebrica e geometrica. Scrivete equazioni cartesiane e parametriche per i corrispondenti autospazi. Ci sono autospazi ortogonali?

Esercizio 5. Rispondete alle seguenti domande, giustificando la risposta:

- Se avete **due** sistemi di tre variabili in tre incognite e considerate l'insieme dei punti che risolvono entrambi, questo può essere costituito da tre punti?
- Scrivete quattro vettori non nulli di \mathbb{R}^4 mutualmente ortogonali (nel senso che ognuno è ortogonale a tutti gli altri).
- Quanto vale l'angolo tra i vettori e_1 ed $e_1 + e_2$ **in radianti**?

Esercizio 6. Rispondete alle seguenti domande.

- Data una funzione $f : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, cosa significa che $x_0 = 1$ è un punto di massimo assoluto per f ?
- L'intersezione degli intervalli $(1, 3)$ e $(-1, 2]$ è ... e la loro unione è ...
- Scrivete il teorema dell'esistenza degli zeri per le funzioni continue. Mostrate un esempio di funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ discontinua solo in $x = 1/2$ con $f(0) > 0$, $f(1) < 0$ ma che non si annulla mai in $[0, 1]$.

Esercizio 7. Disegnate un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x^2 + x + 2}$$

dopo averne trovato il dominio naturale di definizione, eventuali simmetrie, le intersezioni con gli assi, l'insieme di positività, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia attraverso lo studio della derivata prima, massimi/minimi relativi e relativi punti di max/min, gli intervalli di convessità/concavità attraverso lo studio della derivata seconda (suggerimento: **nella positività della derivata seconda** devono comparire numeri con $\sqrt{21}$...).

Esercizio 8. Calcolate

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(\cos x) - 1} - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\ln(1+2x)} - 1}{x}.$$

Esercizio 9. Calcolate gli integrali

$$\int \left[\sin x + \frac{1}{2} x \sin(x^2) \right] dx, \quad \int x^2 \sin x dx.$$