

**TERZO APPELLO SCRITTO DEL CORSO DI
FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA E GEOMETRIA
CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ
PARMA, 16.04.20**

IMPORTANTE: leggete CON ATTENZIONE queste righe prima di iniziare.

Sono permesse calcolatrici ma **non** l'uso dei telefoni cellulari e degli appunti. Indicate **nome e cognome** su tutti i fogli (protocollo inclusi). **Scrivete sul primo foglio di bella** quale dei sei compiti affrontate. **Scrivete chiaramente** quali sono i fogli di bella e quali quelli di brutta. Le risposte vanno **giustificate**. La durata dell'esame, che dipende dallo scritto che affronterete, è indicata qui sotto.

-
- ARS, 8CFU, **compito intero**: Esercizi **1,2,3,6,7,8**, durata **2h15'**
 - ARS 2019/20, 8CFU, **compitino analisi**: Esercizi **6,7,8,9**, durata **1h45'**
 - Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compitino analisi avendo frequentato il corso a.a. 2019/20**: Esercizi **6,7,8,9**, durata **1h45'**
 - Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compito intero**: Esercizi **2,3,4,5,6,7,8**, durata **2h30'**
 - Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **analisi**: Esercizi **6,7,8**, durata **1h30'**
 - Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **geometria**: Esercizi **1,2,3,4**, durata **1h10'**
-

Esercizio 1. Data la retta in \mathbb{R}^3 di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z - 1 = 0, \end{cases}$$

trovarne due punti distinti e la sua equazione parametrica. Tale retta passa per l'origine?

Esercizio 2. Trovare equazioni cartesiana e parametrica del piano di \mathbb{R}^3 passante per $P = (1, 1, -1)$ ed avente un vettore normale $e_2 - e_3$. Che oggetto geometrico è l'intersezione tra tale piano ed il piano $x = 0$ (cioè è un punto, una retta, un piano? Passante o meno per l'origine)? Scrivetene l'equazione cartesiana.

Esercizio 3. Scrivete le matrici (completa A ed incompleta $(A|b)$) associate al sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y - 2z = -6 \\ x + 2y = 2, \end{cases}$$

calcolate il determinante di A ed il rango di $(A|b)$. Quante soluzioni ha il sistema?

Esercizio 4. Data la matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

scrivete l'operatore lineare associato $T(x, y, z) = A(x, y, z)^T$ (a destra dell'uguale trovate il prodotto righe per colonne) e trovatene gli autovalori con le loro molteplicità algebrica e geometrica. Infine scrivete le equazioni cartesiane e parametriche dei corrispondenti autospazi.

Esercizio 5. Rispondete alle seguenti domande, giustificando la risposta:

- Può un sistema omogeneo essere impossibile?
- Trovate un vettore ortogonale sia a $v_1 = e_1 - e_3$ che a $v_2 = e_2 + e_3$.
- Calcolate il prodotto scalare tra v_1 e v_2 della domanda precedente.

Esercizio 6. Rispondete alle seguenti domande.

- Scrivete tre primitive diverse della funzione $f(x) = e^x$.
- Data una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ed un punto dell'intervallo $x \in (a, b)$, quale è la definizione e cosa rappresenta graficamente il rapporto incrementale di incremento h ?
- Enunciate precisamente il teorema di Weierstrass per le funzioni continue, e disegnate una funzione continua sull'intervallo aperto $(-1, 1)$ che però non ha né massimo né minimo.

Esercizio 7. Si disegni un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{1}{3}$$

dopo averne trovato il dominio naturale di definizione, eventuali simmetrie, le intersezioni con gli assi, l'insieme di positività, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia attraverso lo studio della derivata prima, massimi/minimi relativi e relativi punti di max / min. **Facoltativi sono** gli intervalli di convessità/concavità attraverso lo studio della derivata seconda.

Esercizio 8. Si calcoli l'integrale

$$\int_{-1}^0 \left[3(x-1)^3 + (1-x)^{1/3} - \frac{2}{x+2} \right] dx.$$

Esercizio 9. Della funzione f il cui grafico è riportato sotto, calcolate $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$. Quante controimmagini hanno $y = 2$ e $y = 0$? Individuate due punti di massimo relativo di f . Quanto vale il massimo assoluto della funzione? Calcolate

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

La funzione f è derivabile nel punto $x = 2$?

