SECONDO APPELLO SCRITTO DEL CORSO DI
FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA E GEOMETRIA

CDL IN ARCHITETTURA, RIGENERAZIONE, SOSTENIBILITÀ

PARMA, 10.02.20

IMPORTANTE: leggete CON ATTENZIONE queste righe prima di iniziare.

Sono permesse calcolatrici ma **non** l'uso dei telefoni cellulari e degli appunti. Indicate **nome e cognome** su tutti i fogli (protocollo inclusi). **Fate una crocetta** per indicare quale dei sei compiti affrontate. **Scrivete chiaramente** quale è il foglio di bella e quale quello di brutta. Le risposte vanno **giustificate**. La durata dell'esame, che dipende dallo scritto che affronterete, è indicata qui sotto.

- ARS, 8CFU, **compito intero**: Esercizi **1,2,5,6,8**, durata **2h45'**
- ARS 2019/20, 8CFU, **compitino analisi**: Esercizi **5,6,8,9**, durata **2h**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compitino analisi avendo frequentato il corso a.a. 2019/20**: Esercizi **5,6,7,8 (solo primo integrale),9**, durata **2h30'**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **compito intero**: Esercizi **1,2,3,4,5,6,7,8 (solo primo integrale)**, durata **3h**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **analisi**: Esercizi **5,6,7,8**, durata **1h45'**
- Altri anni, 10, 11 o 12CFU, **geometria**: Esercizi **1,2,3**, durata **1h30'**

Esercizio 1. *Trovate le equazioni cartesiana del piano passante per i punti* $P_1 = (2,0,0), P_2 = (0,1,0)$ *e* $P_3 = (0,0,-1)$ *e del piano ad esso parallelo passante per l'origine. Inoltre trovate equazioni (parametrica e cartesiana) della retta* r *passante per* P_1 *e* P_2*.*

Il punto $P = (-2,2,0)$ *appartiene a tale retta? Disegnatelo in prospettiva in un riferimento cartesiano. Infine trovate la proiezione del punto* P *sul piano ortogonale alla retta* r *passante per l'origine.*

Esercizio 2. *Scrivete la matrice incompleta* A *associata al sistema*

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ y + z = 0, \end{cases}$$

osservate che ha determinante non nullo e risolvete, usando il metodo di Gauss, il sistema sopra e anche

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ y + z = 1. \end{cases}$$

Verificate, infine, che se mettete i tre tre vettori risultanti, in ordine, come colonne della matrice B*, si ha* $AB = \mathrm{Id}$ *(in altre parole, questo è un metodo per calcolare la matrice inversa usando i sistemi lineari).*

Esercizio 3. *Data la matrice* 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

scrivete l'operatore lineare associato $T(x,y,z) = A(x,y,z)^T$ *e trovatene gli autovalori con le loro molteplicità algebrica e geometrica. Infine scrivete le equazioni cartesiane e parametriche dei corrispondenti autospazi.*

Esercizio 4. *Rispondete alle seguenti domande,* **giustificando la risposta***:*

- *Fate un esempio di due vettori in $\mathbb{R}^2$ (diversi tra di loro) tali che il loro sottospazio lineare generato abbia dimensione uno (cioè sia una retta).*
- *I punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $z = x + y^2$ formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$?*
- *Trovate un vettore ortogonale sia a $v_1 = e_1 + e_2 - e_3$ che a $v_2 = -e_1 + e_2 + e_3$.*
- *Una retta passante per l'origine può appartenere ad un piano* **non** *passante per l'origine?*

Esercizio 5. *Rispondete alle seguenti domande.*

- *Disegnate il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che abbia un solo massimo relativo ma non abbia massimo assoluto.*
- *Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, cosa significa che f è continua in un punto $x_0 \in (a, b)$?*
- *Quale dei punti dell'insieme $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ appartengono all'insieme $(-1, 0) \cup [0, 1) \cup (1, 2] \cup (3, +\infty)$?*
- *Enunciate precisamente il teorema fondamentale del calcolo integrale, descrivendo graficamente il significato della funzione integrale.*

Esercizio 6. *Si disegni un grafico approssimativo della funzione*

$$f(x) = (x + 1)^2(3 - x^2)$$

dopo averne trovato il dominio naturale di definizione, eventuali simmetrie, le intersezioni con gli assi, l'insieme di positività, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia attraverso lo studio della derivata prima, massimi/minimi relativi e relativi punti di $\max / \min$, *gli intervalli di convessità/concavità attraverso lo studio della derivata seconda.* **Facolativo:** *quante soluzioni ha l'equazione $(x + 1)^2(3 - x^2) = -1$?*

Esercizio 7. *Si calcolino i seguenti limiti:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x^2)} - 1}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \sqrt{x}}{2e^x + x\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + \sqrt{x^2 + 1}}{2e^x + \sqrt{x^2 + 1}}.$$

Esercizio 8. *Si calcolino gli integrali*

$$\int_0^1 \Big[2(x - 1)^4 - (1 - x)^{2/5}\Big]\, dx, \qquad \int \Big[x^6 + 1 + \frac{1}{x^3 + 1} + e^{x^3}\Big] x^2\, dx.$$

Esercizio 9. *Della funzione*

$$f : (-\infty, 0) \cup [2, +\infty) \to \mathbb{R}$$

il cui grafico è riportato nel prossimo foglio, calcolate $f(-2), f(2), f(4)$. Quante controimmagini ha $y = 3$? $x = -6$ è punto di massimo relativo? E $x = -2$? Quanto vale il massimo assoluto della funzione? Scrivete gli elementi dell'insieme $f^{-1}(2)$ e calcolate

$$\lim_{x\to-2^-} f(x), \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x), \qquad \lim_{x\to 4} f(x), \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

La funzione f è continua nel punto $x = 4$?